

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФГБОУ ВО «ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

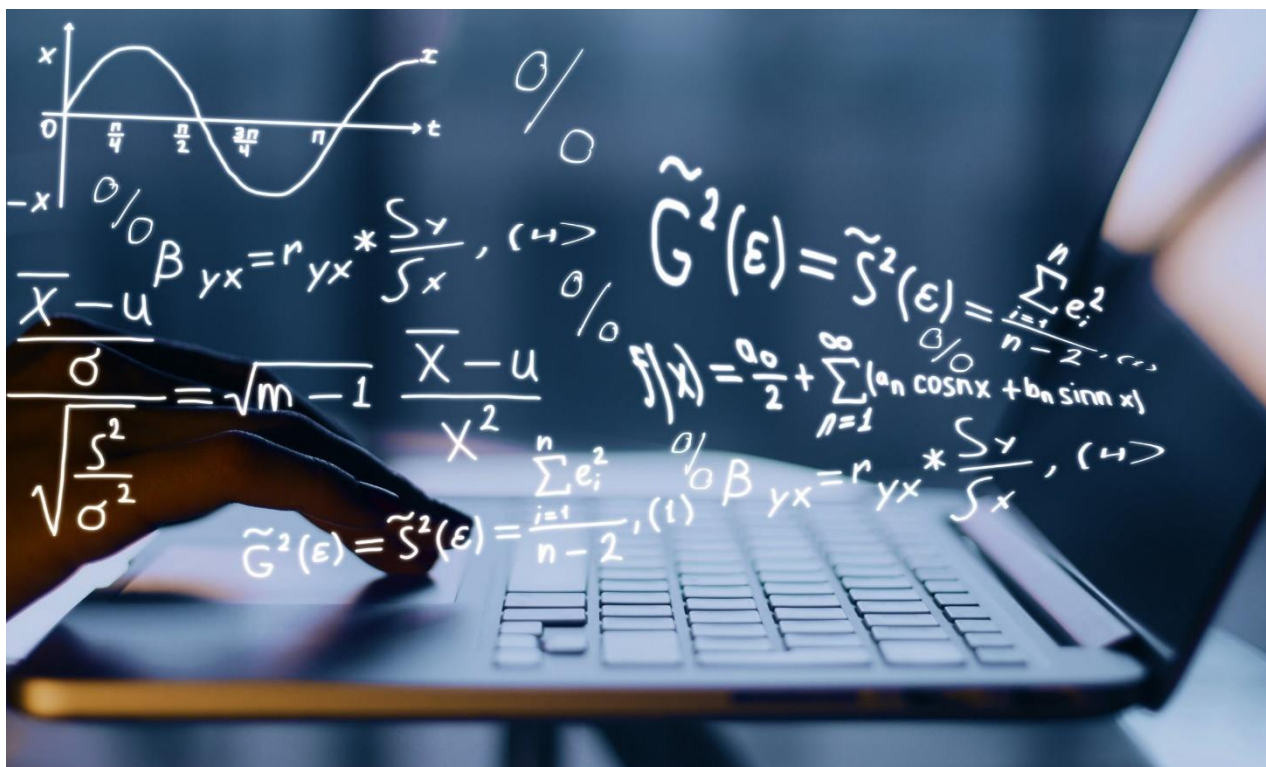


«МУХТАРОВСКИЕ ЧТЕНИЯ:

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ,
МЕТОДИКИ ЕЕ ПРЕПОДАВАНИЯ И СМЕЖНЫЕ
ВОПРОСЫ»

МАТЕРИАЛЫ

МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ



МАХАЧКАЛА – 2024

УДК 517
ББК 22.16
М92

**Материалы международной научной конференции
«Мухтаровские чтения: актуальные проблемы математики, методики
ее преподавания и смежные вопросы».** Махачкала: ДГТУ, 2024 г. 228 с.

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

Председатель организационного комитета:

Абилова Ф.В. – к.ф.-м.н., доцент, заведующая каф. высшей математики ДГТУ

Члены организационного комитета:

Юсуфов Ш.А. – к.т.н., доцент, проректор по научной и инновационной деятельности ДГТУ

Раджабова З.Р. – к.э.н., доцент, декан ФИСвЭиУ ДГТУ

Агаханов Э.К. – д.т.н., профессор, зав. каф. ТСиСМ ДГТУ

Ахмедов Г.Я. – д.т.н., доцент, зав. каф. физики ДГТУ

Гаджиев М.М. – к.ф.-м.н., доцент каф. высшей математики ДГТУ

Нурмагомедов А.М. - к.ф.-м.н., доцент каф. высшей математики ДГТУ

Умалатов С.Д. - к.ф.-м.н., доцент каф. высшей математики ДГТУ

Абилов М.В. - к.ф.-м.н., доцент каф. высшей математики ДГТУ

Хаиров Р.А. - к.ф.-м.н., доцент каф. высшей математики ДГТУ

Шамов Э.Ш. - к.ф.-м.н., доцент каф. высшей математики ДГТУ

Ответственный секретарь:

Шахбанова З.А. – ст. лаборант каф. высшей математики ДГТУ

Редактор: Абилова Ф.В.

В сборнике материалов представлены научные доклады и сообщения, включенные в программу научной конференции.

Основные научные и образовательные цели конференции – анализ и обобщение опыта научно-исследовательской работы в области перспективных и приоритетных направлений развития математики, смежных вопросов, связанных с методикой преподавания математики, физики и информатики, а также современные информационные и вычислительные технологии в прикладных задачах.

ISBN 978-5-907837-35-5

© Дагестанский государственный технический университет, 2024.

© Оформление. ИП Тагиев Р.Х., 2024.

АКТУАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ СПЕЦИАЛИСТА

Х.С. Абдулаева, М.А. Гаджиев, М.Г. Мухидинов
ДГУНХ, Махачкала

Аннотация: в условиях информационной трансформации общества актуализируются математические знания специалистов, так как развитие цифровые технологий и модели представления информации во многом определяется математической готовностью специалиста. В рамках данной статьи акцентируется формированию цифровых компетенций в условиях информационной трансформации математического образования. Этот процесс, определяет необходимость развития содержание цифровой грамотности в сфере математики, как способности решать прикладные задачи с использованием информационных технологий и цифровых математических средств. Математические способности будущего специалиста это его фундаментальная составляющая, которая обеспечивает развитие информационных компетенций в условиях цифровой среды.

Ключевые слова: информационные технологии, цифровые компетенции, цифровые средства, математическая культура, цифровая грамотность, математическая среда.

Цифровые технологии, которые проникают во все сферы деятельности человека определяют необходимость реструктуризации математического образования. Использование информационных технологий определяет необходимость переосмысления не только содержания образовательного процесса в целом, но и его математической составляющей, так все передовые цифровые технологии развиваются благодаря актуализации, компьютеризации математических знаний.

Развитие национальных программ, связанных с цифровой экономикой за период с 2018 по 2024 гг, должны быть проведены более 140 мероприятий по информационной безопасности, 54 связанных цифровыми средствами и технологиями и более 100 связанных с подготовкой кадров для цифровой экономики и

образования и во всех этих проектах обозначаются математические составляющие.

В условия реализации технологического прорыва в России актуализируются сквозные технологии, которые могут кардинально изменить развитие цифровой экономики: искусственный интеллект; большие данные; квантовые технологии; модули распределенного реестра; производственный интернет; робототехника; технологии дополнительной и виртуальной реальности. Все обозначенные технологии развиваются только за счет решения сложных математических задач. Поэтому системе образования сегодня необходимо активно использовать цифровых технологий в рамках математической подготовки будущих специалистов. Информационная трансформация образования переводит этот процесс на новый инновационный уровень, в модель математического образования необходимо привязать к процессу формирования цифровых компетенций.

Трансформации образования и перевод его на цифровые рельсы развиваются параллельно с процессами математизации и компьютеризации так как цифра — это базовое звено в обеих системах. Если математики понимают цифру как это фундаментальную категория, обеспечения формализации любого процесса, цифра в компьютерных системах обеспечивает кодирование и обработку данных.

Сегодня формирование и развитие цифровых компетенций — это доминанта, а исследование возможностей для формирования компетенций для цифровой экономики, следовательно, актуальная задача. Формирование информационной культуре в модели математического образования имеется высокий потенциал при формировать цифровых компетенции и получения навыков работы с большими массивами [9].

Цифровую культуру можно обеспечить только через координацию множества подструктур образования, через актуализацию цифровых технологий, за счет: формирование цифрового контента; оптимизации методов обмена и поиск информации, через использование цифровых средств; повышения эффективности методов коммуникационных и информационных задач; открытости и высокой скорости информационного взаимодействия всех участников профессиональных и социальных

проблем; развития навыков программирования в условиях школьного образования и др.

Сегодня математика это эффективный цифровым инструмент, без которого нельзя преобразовывать большие массивы информации с высокой скоростью. Эффективность этого инструмента обеспечивает математическое мышление будущего специалиста, которая определяется: фундаментальностью; точностью; умение символично мыслить; абстрактностью и др. [4].

Результаты образовательной деятельности, рассматриваются в форме системы компетенций, наполняемых дополнительным содержанием, которое согласно заказу социума, должны обеспечить развитие цифровой культуры специалиста. При том, что универсальные (УК) общепрофессиональные компетенции (ОПК) статически закреплены согласно ФГОС, есть возможность корректировки содержания через реструктуризацию набора индикаторов, определяющих качественные составляющие этих компетенций, путем выделения дополнительных знаний, умений и навыков к необходимой компетенции.

Цифровые средства имеют высокий потенциал по стимулированию обучаемых в сфере математики, а процесс реструктуризации цифровых математических инструментов можно разбить на две группы [10]. цифровые средства по математической характеристике, функционал которого отражает структуру математики как учебного предмета и науки, а именно предназначенные для: алгебраических операций; построения графиков; осуществления вычислительных процедур; решения геометрических задач и т. д. ; цифровые средства по дидактическому функционалу, который определяется и инструментом, и типом решаемых прикладных задач, а также способом использования цифрового инструмента в обучении.

В рамках некоторых исследований приводится классификация цифровых инструментов, по активации математической деятельности следующим дидактическим функциям [10]: поддержки математической активности обучаемых, где речь идёт о помощи учащимся в решении математических задач, цифровые технологии при этом обеспечивают выполнение однотипных операций, которая позволяет им сохранить энергию для выполнения творческих задач. отработки математических навыков, в рамках которой цифровые средства могут интегрируют многочисленные варианты решения

однотипных заданий и автоматизированную и интеллектуальную обратную связь; разработки концепций, которая предполагает использование цифрового средства для организации учебных событий, приводят ученика к выявлению новых событий.

Преимуществом цифровых платформ при обучении математике считается простота визуализации математических объектов и отношений [11].

Некоторые авторы выделяют три аспекта применения цифровых средств при обучении математике [12]: актуализируется образовательная среда, которую конструируют ученики в процессе обучения; анализировать изменения, вносимые обучаемым в используемое цифровое средство; формирование математического понимания обучаемым используемого цифрового инструмента.

Образовательная проекция этой проблемы на плоскость дидактики выявляет связь учебного процесса по математике, принципов дидактики и целей цифрового обучения [2].

Информационные средства в цифровом обществе и практика его реализации актуализирует противоречия между: потребностью цифровой экономики и реальной моделью цифровой подготовки будущих специалистов [7]; уровнем владения цифровыми технологиями специалистами различных профилей и моделью образовательной среды по формированию цифровых компетенций в рамках дисциплин математического цикла.

Согласно исследованию Х.А. Магомерзаева и др. [2] математическая среда для развития цифровых компетенций рассматривается как совокупность дидактических условий, обеспечивающих: дидактическое взаимодействие между обучаемым и средствами информационно-коммуникационных технологий; активность обучаемого на уроках математики, обеспечивающая развитие его цифровых компетенций; эффективное использование программных и аппаратных средств, сетей и коммуникационных каналов, методики цифрового обучения и т.д.

В условиях образовательной математической среды эффективность формирования цифровых компетенций зависит от: согласованности дидактической деятельности и педагогических условий обеспечения учебной деятельности [3]; творческого союза студента и преподавателя для структурирования его индивидуальных психологических характеристик [4]; умения выбирать эффективный способ адаптации к новой дидактической цифровой среде;

координации целей, форм, видов адаптации к новой дидактической цифровой среде [5]; содержания цифровой деятельности для конкретной математической дисциплины [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Жулева Л.Д. Математические методы в современном научном познании и математический стиль мышления // Научный вестник МГТУ ГА. 2014. №203. С. 141-143.

2. Магомерзаев Х. А., Мухидинов М.Г., Испагиева А.Д., Формирование цифровых компетенций в математической среде// В сборнике Digital Era. Материалы II Всероссийской научно-практической конференции. Грозный, 2022. С. 74-76.

3. Мухидинов М.Г. Развитие технологической компоненты профессиональной деятельности будущего учителя информатики //Информатика и образование. № 2. 2015. –С. 46-50.

4. Мухидинов М.Г. Факторы влияющие на развитие содержания компонентов профессиональной деятельности учителя информатики //Информатика и образование. № 6. 2014. –С. 84-87.

5. Мухидинов М.Г., Абдуразаков М.М., Батыгов З.О. Цифровая среда как фактор профессионального развития педагога. Обзор педагогических исследований. 2021. Т.3. №1. С 21-26

6. Мухидинов М.Г., Испагиева А.Д., Магомерзаев Х. А. Информационно-математическая подготовка специалистов // В сборнике: Мухтаровские чтения: актуальные проблемы математики, методики ее преподавания и смежные вопросы. Сборник трудов международной научной конференции, посвященной 50-летию ДГТУ. Махачкала, 2022. С. 105-108.

7. Обучение цифровым навыкам: глобальные вызовы и передовые практики. Аналитический отчет к III Международной конференции «Больше чем обучение: как развивать цифровые навыки», Корпоративный университет Сбербанка. М.: АНО ДПО «Корпоративный университет Сбербанка», 2018. 122 с.

8. Синчуков А.В. Преподавание математических дисциплин в условиях цифровизации // Электронные библиотеки. 2020. Т. 23. № 1-2 С. 177-186.

9. Табачук Н.П. Информационная компетенция личности студента как социокультурный феномен цифрового общества: монография. Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2019. 180 с.

10. Drijvers P. Embodied instrumentation: combining different

views on using digital technology in mathematics education // Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht University, Feb 2019, Utrecht, Netherlands. hal-02436279. – URL: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02436279>

11. Sacristán A. I. Digital technologies in mathematics classrooms: barriers, lessons and focus on teachers // Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education / eds. E.Galindo, J. Newton. – Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators, 2017. – P.90–99.

12. Yeo S. Integrating Digital Technology into Elementary Mathematics: Three Theoretical Perspectives // Journal of the Korea Society of Mathematical Education, series D: Research in mathematical education. – 2020. – Vol. 23. – No. 3. – P.165–179. – URL: <http://doi.org/10.7468/jksmed.2020.23.3.165>.

УДК 519.6

РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА ЛАГЕРРА-ЭРМИТА

М.В. Абилов
ДГТУ, Махачкала

Аннотация: в статье рассмотрены вопросы разложения функции двух переменных Фурье по собственным функциям дифференциального оператора второго порядка.

Ключевые слова: обобщенные частные производные, оператор Лагерра-Эрмита, ортогональная система многочленов, собственные функции.

Рассмотрим вопросы разложения функций двух переменных в ряды Фурье по собственным функциям дифференциального оператора второго порядка

$$D = x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (1 + \alpha - x) \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} ,$$

который, ради удобства, будем называть оператором Лагерра-Эрмита.

Далее будем рассматривать следующие пространства функций:

$L_2(e^{-x}x^\alpha; R_+)$ ($\alpha > -1/2$) - пространство суммируемых с квадратом функций $f: R_+ \rightarrow R$ с весом $e^{-x}x^\alpha$ и нормой

$$\|f\|_{L_2(e^{-x}x^\alpha; R_+)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}x^\alpha f^2(x)dx};$$

$L_2(e^{-y^2}; R)$ - пространство суммируемых с квадратом функций $f: R \rightarrow R$ с весом e^{-y^2} и нормой

$$\|f\|_{L_2(e^{-y^2}; R)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} f^2(y)dy}.$$

Нетрудно заметить, что пространство L_2 есть прямое произведение пространств $L_2(e^{-x}x^\alpha; R_+)$ и $L_2(e^{-y^2}; R)$ с естественной топологией.

Далее, пусть

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^{-x} \frac{d^n}{dx^n} (x^{\alpha+n} e^{-x}) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

- ортогональная система многочленов Лагерра в пространстве $L_2(e^{-x}x^\alpha; R_+)$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n!}, & n = m \end{cases}$$

и

$$H_m(y) = (-1)^m e^{y^2} \frac{d^m}{dy^m} (e^{-y^2}) \quad (m = 0, 1, \dots)$$

ортогональная система многочленов Эрмита в пространстве

$$L_2(e^{-y^2}; R), \text{ т.е.}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} H_m(y)H_n(y)dy = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ m! 2^{m\sqrt{\pi}}, & n = m. \end{cases}$$

Тогда хорошо известно, что система многочленов $L_n^{(\alpha)}(x)H_m(y)$ ($n, m = 0, 1, \dots$) образует ортогональную систему многочленов в пространстве L_2 и для любой функции $f \in L_2$, в топологии пространства L_2 , справедливо разложение

$$f(x, y) = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm}(f)} L_n^{(\alpha)}(x)H_m(y) \quad (1)$$

$$\left(c_{nm}(f) = \frac{n!}{m! 2^m \sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + n + 1)} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x-y^2} x^\alpha f(x, y) L_n^{(\alpha)}(x) H_m(y) dx dy \right)$$

которое будем называть рядом Фурье-Лагерра-Эрмита функции $f \in L_2$.

Через

$$S_N(f; x, y) = \sum_{0 \leq n+m \leq N} c_{nm}(f) L_n^{(\alpha)}(x) H_m(y)$$

обозначим треугольные частичные суммы ряда (1).

Из уравнения замкнутости Стеклова

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}^2(f)}, \quad (2)$$

следует, что

$$\|f - S_N(f)\| = \sqrt{\sum_{n+m \geq N} a_{nm}^2(f)}, \quad (3)$$

где

$$a_{nm}^2(f) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} m! 2^m \sqrt{\pi} c_{nm}^2(f).$$

Напомним, что величина

$$d_N(M) = d_N(M; L_2) = \inf_{G_N \subset L_2} \left\{ \sup_{f \in M} \left\{ \inf_{g \in G_N} \|f - g\| \right\} \right\},$$

где последний раз точная нижняя грань берется по всем подпространствам $G_N \subset L_2$ размерности $N \in \mathbb{N}$, называется N -поперечником Колмогорова множества $M \subset L_2$.

Пусть, далее,

$$D = x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (1 + \alpha - x) \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$$

- дифференциальный оператор второго порядка (оператор Лагерра-Эрмита).

Рассмотрим следующие классы функций.

$L_2^r(D)$ - дифференциального оператора второго порядка имеющих обобщенные частные производные

$$\frac{\partial^k}{\partial x^i \partial y^j} f(x, y) \quad (i + j = k, k = 0, 1, \dots)$$

принадлежащие пространству L_2 , для которых $D^r f \in L_2$ ($r=0, 1, \dots$).

Как обычно,

$$D^0 f = f, \quad D^r f = D(D^{r-1} f) \quad (r = 1, 2, \dots), \quad L_2^0(D) = L_2.$$

$W_2^r(D)$ – класс функций $f \in L_2^r(D)$, для которых
 $\|D^r(f)\| \leq 1 \quad (r = 1, 2, \dots)$.

Лемма. Если $f \in L_2^r(D)$, то

$$c_{nm}(f) = \frac{(-1)^r}{(n+m)^r} c_{nm}(D^r f).$$

Сформулируем следующую теорему.

Теорема. При каждом фиксированном $N = 1, 2, \dots$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in W_2^r(D)} \|f - S_N(f)\| = \frac{1}{N^r}, \quad (r = 1, 2, \dots).$$

Верхняя грань достигается для функции

$$f^*(x, y) = \frac{N!}{N^r \Gamma(\alpha + N + 1) \sqrt{\pi}} L_N^{(\alpha)}(x) H_0(y).$$

Доказательство. Пусть $f \in W_2^r(D)$. Тогда из (2) и (3), в силу леммы, имеем

$$\begin{aligned} \|f - S_N(f)\|^2 &= \sum_{n+m \geq N} a_{nm}^2(f) = \sum_{n+m \geq N} \frac{1}{(n+m)^{2r}} a_{nm}^2(D^r f) \leq \\ &\leq \frac{1}{N^{2r}} \sum_{n+m \geq N} a_{nm}^2(D^r f) \leq \frac{1}{N^{2r}} \|D^r f\|^2 \leq \frac{1}{N^{2r}}, \end{aligned}$$

то есть

$$\sup \|f - S_N(f)\| \leq \frac{1}{N^r}. \quad (4)$$

С другой стороны, функция

$$f^*(x, y) = \frac{N!}{N^r \Gamma(\alpha + N + 1) \sqrt{\pi}} L_N^{(\alpha)}(x) H_0(y)$$

принадлежит классу $W_2^r(D)$ и нетрудно заметить, что

$$\|f^* - S_N(f^*)\| = \|f^*\| = \frac{1}{N^r}.$$

Отсюда и из (4) следует требуемое равенство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абилов В.А., Абилов М.В. Приближение непрерывных функций двух переменных суммами Фурье-Лагерра в среднем. // Деп. ВИНТИ, 1993, № 1427-В93; 2-25; РЖМ. 1993, 9Б64.
2. Абилов В.А., Абилов М.В., Керимов М.К. Некоторые вопросы сходимости двойных рядов Фурье-Лагерра-Эрмита // Журнал ВМ и МФ, Т.44, № 2, 2004, с.213-230.
3. Абилов В.А., Абилов М.В. Приближение функций в пространстве $L_2(\mathbb{R}^N; \exp(-|x|^2))$. // Матем. заметки. Т. 57, № 1, 1995, с. 3-19.
4. Колмогоров А.Н. Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1995.

5. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.

УДК 517.518.476

СХОДИМОСТЬ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ, ПОСТРОЕННЫХ ПО БАЗИСУ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ЛАГЕРРА И ЭРМИТА

Ф.В. Абилова
ДГТУ, Махачкала

Аннотация: статья посвящена вопросам разложения функций двух переменных в двойные ряды Фурье, построенные по базису многочленов Лагерра и Эрмита. Эти проблемы являются основными при численном решении дифференциальных уравнений спектральными методами.

Ключевые слова: двойные ряды Фурье, ортогональные многочлены, обобщенный модуль непрерывности, частичные суммы, поперечник Колмогорова.

Пусть

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{\alpha+n} e^{-x}), n = 0, 1, \dots,$$

- ортогональная система многочленов Лаггера в пространстве $L_2(e^{-x} x^\alpha; \mathbb{R}_+)$, т.е.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n!}, & n = m, \end{cases}$$

$$H_m(y) = (-1)^m e^{y^2} \frac{d^m}{dy^m} (e^{-y^2}), m = 0, 1, \dots,$$

- ортогональная система многочленов Эрмита в пространстве $L_2(e^{-y^2}; \mathbb{R})$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} H_m(y) H_n(y) dy = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ m! 2^m \sqrt{\pi}, & m = n. \end{cases}$$

Разложение

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm}(f) L_n^{(\alpha)}(x) H_m(y), \quad (1)$$

где

$$c_{nm}(f) = \frac{n!}{m! 2^m \sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + n + 1)} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 - y^2} x^\alpha f(x, y) L_n^{(\alpha)}(x) H_m(y) dx dy$$

будем называть рядом Фурье-Лагерра-Эрмита функции $f \in L_2$.

Через

$$S_N^{(p,q)}(f; x, y) = \sum_{0 \leq pn + qm < N} c_{nm}(f) L_n^{(\alpha)}(x) H_m(y), 0 < \frac{1}{\alpha} \leq \frac{p}{q} \leq \lambda < +\infty,$$

обозначим «треугольные» частичные суммы ряда (1).

Напомним, что величина

$$d_N(\mathbb{M}) = d_N(\mathbb{M}; L_2) = \inf_{G_N \subset L_2} \left\{ \sup_{f \in \mathbb{M}} \left\{ \inf_{g \in G_N} \|f - g\| \right\} \right\},$$

где последний раз точная нижняя грань берется по всем подпространствам $G_N \subset L_2$ размерности $N \in \mathbb{N}$, называется N - поперечником Колмогорова множества $\mathbb{M} \subset L_2$.

Определим теперь оператор $F_h: L_2 \rightarrow L_2$ равенством

$$F_h = A_h \circ B_h = B_h \circ A_h$$

и назовем его оператором обобщенного сдвига в пространстве L_2 .

Нетрудно видеть, что

$$F_h f(x, y) = \frac{2^{\alpha-1/2} \Gamma(\alpha + 1)}{\pi} \times \int_{-1}^1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + h + 2\sqrt{x}hu, y\sqrt{1-h^2} + hv) K_\alpha(h, x, u) e^{-v^2} dudv.$$

Определим разности первого и высших порядков следующим образом

$$\Delta_h(f; (x, y)) = F_h f(x, y) - f(x, y) = (F_h - E)f(x, y),$$

$$\Delta_h^k(f; x, y) = \Delta_h(\Delta_h^{k-1}(f; x, y); x, y) =$$

$$= (F_h - E)^k f(x, y) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} F_h^i f(x, y),$$

где $F_h^0 f(x, y) = f(x, y) = f(x, y)$, $F_h^i f(x, y) = F_h(F_h^{i-1} f(x, y))$

($i = 1, 2, \dots, k, k = 1, 2, \dots$) и E - единичный оператор в пространстве L_2 .

Величину

$$\Omega_k(f; \delta) = \sup_{0 < h \leq \delta} \|\Delta_h^k(f; x, y)\|$$

будем называть обобщенным модулем непрерывности k – го порядка функции $f \in L_2$.

Пусть, далее,

$$D = x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (1 + \alpha - x) \frac{\partial}{\partial x} - 2y \frac{\partial}{\partial y}$$

- дифференциальный оператор второго порядка.

Сформулируем следующую теорему.

Теорема. Справедлива оценка

$$\sup_{f \in W_{2,\Phi}^{r,k}(D)} \|f - S_N^{(p,q)}(f)\| = O(N^{-r} \Phi(N^{-k})), r = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots,$$

где константа, входящая $O(1)$, зависит от λ, r, k .

Для доказательства введем вспомогательные предложения и лемму.

Для многочленов Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$ известно, что

$$c_1 n^\alpha \leq L_n^{(\alpha)}(0) \leq c_2 n^\alpha, \quad (2)$$

$$e^{-\frac{x}{2} x^{\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}}} |L_n^{(\alpha)}(x)| \leq c_3 n^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}, \quad (3)$$

$$\left| \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{L_n^{(\alpha)}(0)} \right| \leq c_4, \quad (4)$$

где $x \in [0, 1]$, $\alpha > -\frac{1}{2}$ и c_1, c_2, \dots - некоторые фиксированные положительные постоянные, зависящие только от α и r .

Лемма 1. Справедливы неравенства

$$\left| 1 - \frac{L_n^{(\alpha)}(h)}{L_n^{(\alpha)}(0)} \right| \leq c_5 n h, \quad (5)$$

$$\left| 1 - (1 - h^2)^{\frac{m}{2}} \right| \leq m h^2, \quad (6)$$

где $n, m = 0, 1, \dots, 0 < h < 1$.

Лемма 2. Для любой функции $f \in L_2^r(D)$ справедлива равенство

$$\|\Delta_h^k(D^r f)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(1 - \frac{L_n^{(\alpha)}(h)}{L_n^{(\alpha)}(0)} (1 - h^2)^{\frac{m}{2}} \right)^{2k} (n + 2m)^{2r} a_{nm}^2(f).$$

Доказательство теоремы. Пусть $f \in W_{2,\Phi}^{r,k}(D)$. В силу неравенства Гельдера,

$$\sum_{n+m \geq N} a_{nm}^2(f) - \sum_{n+m \geq N} \frac{L_n^{(\alpha)}(h)}{L_n^{(\alpha)}(0)} (1 - h^2)^{\frac{m}{2}} a_{nm}^2(f) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n+m \geq N} |a_{nm}(f)|^{2-\frac{1}{k}} |a_{nm}(f)|^{\frac{1}{k}} \left(1 - \frac{L_n^{(\alpha)}(h)}{L_n^{(\alpha)}(0)} (1-h^2)^{\frac{m}{2}}\right) \leq \\
&\leq \left(\sum_{n+m \geq N} a_{nm}^2(f) \right)^{\frac{2k-1}{2k}} \left(\sum_{n+m \geq N} \left(1 - \frac{L_n^{(\alpha)}(h)}{L_n^{(\alpha)}(0)} (1-h^2)^{\frac{m}{2}}\right)^{2k} a_{nm}^2(f) \right)^{\frac{1}{2k}} = \\
&= \left(\sum_{n+m \geq N} a_{nm}^2(f) \right)^{\frac{2k-1}{2k}} \times \\
&\times \left(\sum_{n+m \geq N} \frac{1}{(n+2m)^{2r}} \left(1 - \frac{L_n^{(\alpha)}(h)}{L_n^{(\alpha)}(0)} (1-h^2)^{\frac{m}{2}}\right)^{2k} (n+2m)^{2r} a_{nm}^2(f) \right)^{\frac{1}{2k}} \leq \\
&\leq N^{-\frac{r}{k}} \left(\sum_{n+m \geq N} a_{nm}^2(f) \right)^{\frac{2k-1}{2k}} \times \\
&\times \left(\sum_{n+m \geq N} \left(1 - \frac{L_n^{(\alpha)}(h)}{L_n^{(\alpha)}(0)} (1-h^2)^{\frac{m}{2}}\right)^{2k} (n+2m)^{2r} a_{nm}^2(f) \right)^{\frac{1}{2k}}.
\end{aligned}$$

В силу леммы 2,

$$\sum_{n+m \geq N} \left(1 - \frac{L_n^{(\alpha)}(h)}{L_n^{(\alpha)}(0)} (1-h^2)^{\frac{m}{2}}\right)^{2k} (n+2m)^{2r} a_{nm}^2(f) \leq \|\Delta_h^k(D^r f)\|^2.$$

Поэтому из предыдущего неравенства следует, что

$$\begin{aligned}
\sum_{n+m \geq N} a_{nm}^2(f) &\geq N^{-\frac{r}{k}} \left(\sum_{n+m \geq N} a_{nm}^2(f) \right)^{\frac{2k-1}{2k}} \|\Delta_h^k(D^r f)\|^{\frac{1}{k}} + \\
&+ \sum_{n+m \geq N} \frac{L_n^{(\alpha)}(h)}{L_n^{(\alpha)}(0)} (1-h^2)^{\frac{m}{2}} a_{nm}^2(f). \tag{7}
\end{aligned}$$

Оценим теперь сумму

$$\Sigma = \sum_{n+m \geq N} \left| \frac{L_n^{(\alpha)}(h)}{L_n^{(\alpha)}(0)} \right| (1-h^2)^{\frac{m}{2}} a_{nm}^2(f).$$

Рассмотрим два множества индексов:

$$E_1 = \left\{ (n, m) : n + m \geq N, n \geq \frac{N}{2} \right\}, E_2 = \left\{ (n, m) : n + m \geq N, m \geq \frac{N}{2} \right\}.$$

Тогда

$$\sum \leq \left(\sum_{E_1} + \sum_{E_2} \right) \left| \frac{L_n^{(\alpha)}(h)}{L_n^{(\alpha)}(0)} \right| (1 - h^2)^{\frac{m}{2}} a_{nm}^2(f) = \sum_1 + \sum_2.$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_1 &= \sum_{E_1} \left| \frac{L_n^{(\alpha)}(h)}{L_n^{(\alpha)}(0)} \right| (1 - h^2)^{\frac{m}{2}} a_{nm}^2(f) \leq \sum_{E_1} \left| \frac{L_n^{(\alpha)}(h)}{L_n^{(\alpha)}(0)} \right| a_{nm}^2(f) = \\ &= e^{\frac{h}{2} h^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}} \sum_{E_1} \left| \frac{e^{-\frac{h}{2} h^{\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}} L_n^{(\alpha)}(h)}}{L_n^{(\alpha)}(0)} \right| a_{nm}^2(f). \end{aligned}$$

Отсюда, в силу неравенств (2) и (3), имеем

$$\begin{aligned} \sum_1 &\leq c_8 h^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} \sum_{E_1} \frac{n^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}}{n^\alpha} a_{nm}^2(f) = c_8 h^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} \sum_{E_1} n^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} a_{nm}^2(f) \leq \\ &\leq c_9 (hN)^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} \sum_{E_1} a_{nm}^2(f), \\ \sum_1 &\leq c_9 (hN)^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} \sum_{n+m \geq N} a_{nm}^2(f). \end{aligned}$$

Далее,

$$\sum_2 \leq \sum_{E_2} \left| \frac{L_n^{(\alpha)}(h)}{L_n^{(\alpha)}(0)} \right| (1 - h^2)^{\frac{m}{2}} a_{nm}^2(f).$$

В силу неравенства (4),

$$\sum_2 \leq c_4 \sum_{E_2} (1 - h^2)^{\frac{m}{2}} a_{nm}^2(f) \leq c_4 (1 - h^2)^{\frac{N}{4}} \sum_{n+m \geq N} a_{nm}^2(f),$$

т.е.

$$\sum_2 \leq c_4 (1 - h^2)^{\frac{N}{4}} \sum_{n+m \geq N} a_{nm}^2(f).$$

Из оценок для \sum_1 и \sum_2 следует, что

$$\sum \leq c_{10} \left((hN)^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} + (1 - h^2)^{\frac{N}{4}} \right) \sum_{n+m \geq N} a_{nm}^2(f).$$

Полагая здесь $h = \frac{c}{N}$, где $c > 0$ – произвольная постоянная, выбор которой укажем ниже, и замечая, что

$$\left(1 - \frac{c^2}{N^2}\right)^{\frac{N}{4}} \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$$

имеем

$$\sum \leq c_{11} \sum_{n+m \geq N} a_{nm}^2(f),$$

где постоянная c_{11} зависит от c , выбор которой оставался открытым. Выберем ее так, чтобы $1 - c_{11} \geq \frac{1}{2}$. Тогда из (7) следует неравенство

$$(1 - c_{11}) \sum_{n+m \geq N} a_{nm}^2(f) \leq N^{-\frac{r}{k}} \left(\sum_{n+m \geq N} a_{nm}^2(f) \right)^{\frac{2k-1}{2k}} \left\| \Delta_{\frac{c}{N}}^k(D^r f) \right\|^{\frac{1}{k}}.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{n+m \geq N} a_{nm}^2(f) \leq c_{12} N^{-2r} \left\| \Delta_{\frac{c}{N}}^k(D^r f) \right\|^{\frac{1}{k}},$$

или

$$\|f - S_N^{(1,1)}(f)\| = o(N^{-r} \Phi(N^{-k})).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Абилов В.А., Абилов М.В. Приближение функций в пространстве $L_2(\mathbb{R}^N; e^{-x^2})$ // Матем. заметки. 1995. Т. 57. № 1. С. 3-19.
2. Abilov VA. On the best approximation of functions of many variables by algebraic polynomials // East J. Approx. 1996. V. 2. № 4. P. 477-497.
3. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы сходимости кратных рядов Фурье // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т. 39. № 12. С. 1951-1961.
4. Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
5. Колмогоров А.Н. Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1987.

УДК 519.651

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ СМЕШАННЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ-БЕССЕЛЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Ф.В. Абилова
ДГТУ, Махачкала

Аннотация: в статье рассмотрены некоторые вопросы разложения функций двух переменных в смешанные ряды Фурье-Бесселя, а также даны оценки скорости сходимости этих рядов на классах функций двух переменных, характеризующихся обобщенными модулями непрерывности и оценки остаточных членов рядов.

Ключевые слова: смешанные ряды Фурье-Бесселя, обобщенный модуль непрерывности, абсолютная сходимость оценки остаточных членов, поперечники, ряд Фурье.

Рассмотрим следующие три типа функциональных пространств: $L_2(p(x); (0; 1))$ – пространство суммируемых с квадратом функций $f: (0; 1) \rightarrow \mathbb{R}$ с весом $p(x)$ и нормой

$$\|f\|_{L_2(p(x);(0;1))} = \sqrt{\int_0^1 p(x)f^2(x)dx};$$

$L_2(2\pi)$ – пространство суммируемых с квадратом 2π – периодических функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и с нормой

$$\|f\|_{L_2(2\pi)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx};$$

$L_2(p(x); (0; 1) \times \mathbb{R})$ - пространство суммируемых с квадратом и весом $p(x)$ 2π – периодических по переменной $t \in \mathbb{R}$ при каждом фиксированном $x \in (0; 1)$ функций $f: (0; 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и с нормой

$$\|f\|_{L_2(p(x);(0;1)\times\mathbb{R})} = \sqrt{\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} p(x)f^2(x,t)dxdt}.$$

Всюду ниже рассматриваются функции $f \in L_2(p(x); (0; 1) \times \mathbb{R})$, для которых

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} p(x)f(x,t)dxdt.$$

Известно, что система функций $J_p(\lambda_m x) \cos(nt), J_p(\lambda_m x) \sin(nt)$ ($m, n = 1, 2, \dots$) – занумерованные в порядке возрастания положительные нули функции Бесселя $J_p(x)$ I рода порядка p , т.е.

$$J_p(\lambda_m) = 0, 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots,$$

образует полную ортогональную систему функций в пространстве L_2 , т.е. для любой функции $f \in L_2$ в топологии этого пространства справедливо разложение

$$f(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_p(\lambda_m x) [a_{mn}(f) \cos(nt) + b_{mn}(f) \sin(nt)], \quad (1)$$

где

$$a_{mn}(f) = \frac{2}{\pi J_{p+1}^2(\lambda_m)} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} x f(x, t) J_p(\lambda_m x) \cos(nt) dx dt,$$

$$b_{mn}(f) = \frac{2}{\pi J_{p+1}^2(\lambda_m)} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} x f(x, t) J_p(\lambda_m x) \sin(nt) dx dt.$$

Это разложение назовем смешанным рядом Фурье-Бесселя функции $f \in L_2(p(x); (0; 1) \times \mathbb{R})$.

Пусть

$$S_R(f; x, t) = \sum_{0 < m^2 + n^2 < R^2} J_p(\lambda_m x) [a_{mn}(f) \cos(nt) + b_{mn}(f) \sin(nt)],$$

$$S_R^*(f; x, t) = \sum_{0 < \lambda_m^2 + n^2 < \lambda_R^2 + R^2} J_p(\lambda_m x) [a_{mn}(f) \cos(nt) + b_{mn}(f) \sin(nt)],$$

- «сферические» частичные суммы ряда (1).

Из уравнения замкнутости Стеклова

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}^2(f)} \quad (2)$$

следует, что

$$\|f - S_R(f)\| = \sqrt{\sum_{m^2 + n^2 \geq R^2} c_{mn}^2(f)},$$

$$\|f - S_R^*(f)\| = \sqrt{\sum_{\lambda_m^2 + n^2 \geq \lambda_R^2 + R^2} c_{mn}^2(f)}, \quad (3)$$

где

$$c_{mn}(f) = \frac{\pi}{2} J_{p+1}^2(\lambda_m) [a_{mn}^2(f) + b_{mn}^2(f)].$$

Напомним, что величина

$$d_N(\mathbb{M}) = d_N(\mathbb{M}; L_2) = \inf_{G_N \subset L_2} \left\{ \sup_{f \in \mathbb{M}} \left\{ \inf_{g \in G_N} \|f - g\| \right\} \right\}, \quad (4)$$

где последний раз точная нижняя грань берется по всем подпространствам $G_N \subset L_2$ размерности $N \in \mathbb{N}$, называется N - поперечником Колмогорова множества $\mathbb{M} \subset L_2$.

Если существует такое $G_N^* \subset L_2$, что

$$\inf_{G_N \subset L_2} \left\{ \sup_{f \in \mathbb{M}} \left\{ \inf_{g \in G_N} \|f - g\| \right\} \right\} = \sup_{f \in \mathbb{M}} \left\{ \inf_{g \in G_N^*} \|f - g\| \right\},$$

то подпространство G_N^* называется экстремальным для множества \mathbb{M} в пространстве L_2 .

Определим теперь оператор $F_h: L_2 \rightarrow L_2$ равенством

$$F_h = A_h \circ B_h = B_h \circ A_h$$

и назовем его оператором обобщенного сдвига в пространстве L_2 . Легко показать, что F_h - линейный ограниченный оператор и, кроме того,

$$\|F_h f - f\| \rightarrow 0, h \rightarrow 0+, \quad (5)$$

$$F_h J_p(\lambda_m x) \cos(nt) = \frac{2^p \Gamma(p+1) J_p(\lambda_m h) \sin(nh)}{(\lambda_m h)^p nh} J_p(\lambda_m x) \cos(nt), \quad (6)$$

$$F_h J_p(\lambda_m x) \sin(nt) = \frac{2^p \Gamma(p+1) J_p(\lambda_m h) \sin(nh)}{(\lambda_m h)^p nh} J_p(\lambda_m x) \sin(nt), \quad (7)$$

Для функции $f \in L_2$ определим разности первого и высших порядков следующим образом

$$\Delta_h f(x, t) = F_h f(x, t) - f(x, t) = (F_h - E) f(x, t),$$

$$\Delta_h^k(f, t) = \Delta_h \left(\Delta_h^{k-1}(f, t) \right) =$$

$$= (F_h - E)^k f(x, y) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} F_h^i f(x, t),$$

где

$F_h^0 f(x, t) = f(x, t)$, $F_h^i f(x, t) = F_h(F_h^{i-1} f(x, t))$ $i = 1, 2, \dots, k$, $k = 1, 2, \dots$ и E - единичный оператор в пространстве L_2 .

Величину

$$\Omega_k(f; \delta) = \sup_{0 < h \leq \delta} \|\Delta_h^k f(x, t)\| \quad (8)$$

будем называть обобщенным модулем непрерывности k - го порядка функции $f \in L_2$.

Пусть, далее,

$$D = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{p^2}{x^2}$$

есть дифференциальный оператор второго порядка.

Теорема. Для функции $f \in L_2$ имеет место оценки

$$\Omega_k \left(f; \frac{1}{R} \right) \ll \left(\frac{1}{R^{4k}} \sum_{l=1}^R l^{4k-1} E_l^2(f) \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\Omega_k \left(f; \frac{1}{R} \right) \ll \left(\frac{1}{R^{4k}} \sum_{l=1}^R l^{4k-1} E_l^{*2}(f) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для доказательства теоремы введем некоторые вспомогательные предложения.

Для функции $J_p(x)$ справедливы оценки

$$J_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos \left(x - \frac{p\pi}{2} \right) - \frac{\pi}{4} + O \left(\frac{1}{x} \right) \right], x \rightarrow \infty, \quad (9)$$

$$J_p(x) = \frac{x^p}{2^p \Gamma(p+1)} [1 + O(x^2)], x \rightarrow 0. \quad (10)$$

Из (9) вытекает асимптотическая оценка для нулей $\lambda_m, m = 1, 2, \dots$, функции $J_p(x)$

$$\lambda_m = \pi m + O(1). \quad (11)$$

Из (9), (10) и из определения функции $J_p(x)$ следует, что

$$1 - \frac{2^p \Gamma(p+1)}{x^p} J_p(x) = O(1), x \geq 1. \quad (12)$$

$$1 - \frac{2^p \Gamma(p+1)}{x^p} J_p(x) = O(x^2), x \rightarrow 0, \quad (13)$$

$$J_p(x) = O(x^p), x > 0. \quad (14)$$

Доказательство. Докажем первую оценку (аналогично доказывается и вторая). Пусть $f \in L_2$. Учитывая, что

$$\|\Delta_h^k f(x, t)\| = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2^p \Gamma(p+1) J_p(\lambda_m h) \sin(nh)}{(\lambda_m h)^p nh} \right)^{2k} c_{mn}^2(f).$$

Так как

$$1 - \frac{2^p \Gamma(p+1) J_p(\lambda_m h) \sin(nh)}{(\lambda_m h)^p nh} = \left(1 - \frac{2^p \Gamma(p+1) J_p(\lambda_m h)}{(\lambda_m h)^p} \right) \frac{\sin(nh)}{nh} +$$

$$+ \left(1 - \frac{\sin(nh)}{nh} \right)$$

и в силу (11), (12), (14) имеем

$$1 - \frac{2^p \Gamma(p+1) J_p(\lambda_m h) \frac{\sin(nh)}{nh}}{(\lambda_m h)^p} = O(1),$$

$$1 - \frac{2^p \Gamma(p+1) J_p(\lambda_m h)}{(\lambda_m h)^p} = O(m^2 h^2)$$

и

$$1 - \frac{\sin(nh)}{nh} = O(1), 1 - \frac{\sin(nh)}{nh} = O(n^2 h^2),$$

то получаем

$$\|\Delta_h^k f(x, t)\| = O \left(h^{4k} \sum_{0 < m^2 + n^2 < R^2} (m^2 + n^2)^{2k} c_{mn}^2(f) + \sum_{m^2 + n^2 \geq R^2} c_{mn}^2(f) \right),$$

или

$$\Omega_k^2(f; h) = O \left(h^{4k} \sum_{0 < m^2 + n^2 < R^2} (m^2 + n^2)^{2k} c_{mn}^2(f) + \sum_{m^2 + n^2 \geq R^2} c_{mn}^2(f) \right).$$

Полагая в этой оценке $h = \frac{1}{R}$, имеем

$$\begin{aligned} \Omega_k^2 \left(f; \frac{1}{R} \right) &= O \left(\frac{1}{R^{4k}} \left(\sum_{0 < m^2 + n^2 < R^2} (m^2 + n^2)^{2k} c_{mn}^2(f) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + R^{4k} \sum_{m^2 + n^2 \geq R^2} c_{mn}^2(f) \right) \right) = \\ &= O \left(\frac{1}{R^{4k}} \left(\sum_{l=1}^R l^k \sum_{(l-1)^2 \leq m^2 + n^2 < l^2} (m^2 + n^2)^{2k} c_{mn}^2(f) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + R^{4k} \sum_{m^2 + n^2 \geq R^2} c_{mn}^2(f) \right) \right) = \\ &= O \left(\frac{1}{R^{4k}} \left(\sum_{l=1}^R l^{4k} \sum_{(l-1)^2 \leq m^2 + n^2 < l^2} c_{mn}^2(f) + R^{4k} \sum_{m^2 + n^2 \geq R^2} c_{mn}^2(f) \right) \right) = \\ &= O \left(\frac{1}{R^{4k}} \left[\sum_{l=1}^R l^{4k} \left(\sum_{m^2 + n^2 \geq (l-1)^2} c_{mn}^2(f) - \sum_{m^2 + n^2 \geq l^2} c_{mn}^2(f) \right) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +R^{4k} \sum_{m^2+n^2>R^2} c_{mn}^2(f) \Big] = O\left(\frac{1}{R^{4k}}\right) \left[\sum_{l=1}^R l^{4k} \left(\sum_{m^2+n^2 \geq (l-1)^2} c_{mn}^2(f) \right) - \right. \\
& \left. - \sum_{l=1}^R l^{4k} \left(\sum_{m^2+n^2 \geq l^2} c_{mn}^2(f) \right) + R^{4k} \sum_{m^2+n^2>R^2} c_{mn}^2(f) \right] = \\
& = O\left(\frac{1}{R^{4k}}\right) \sum_{l=1}^R [l^{4k} - (l-1)^{4k}] \sum_{m^2+n^2 \geq (l-1)^2} c_{mn}^2(f) = \\
& = O\left(\frac{1}{R^{4k}}\right) \sum_{l=1}^R l^{4k-1} - E_{l-1}^2(f), \\
& \Omega_k^2\left(f; \frac{1}{R}\right) \ll \frac{1}{R^{4k}} \sum_{l=1}^R l^{4k-1} E_{l-1}^2(f).
\end{aligned}$$

Отсюда следует требуемая оценка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
2. Абилов В.А., Абилов М.В., Керимов М.К. Некоторые вопросы сходимости двойных рядов Фурье-Лагерра-Эрмита // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 12. С. 2128-2149.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
4. Колмогоров А.Н. Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1987.
5. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Приближение функции суммами Фурье-Бесселя // Изв. вузов. Математика. 2001. №8. С. 3-9.

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛАЖНОСТНОГО НАБУХАНИЯ ГЛИНИСТОГО ГРУНТА

Э.К. Агаханов
ДГТУ, Махачкала

Аннотация: методами механики деформируемого твердого тела выполнено моделирование напряжений в массиве набухающего

глинистого грунта, находящегося под воздействием градиента влажности. Для напряжений от влажностного набухания установлена аналогия с действием объемных и поверхностных сил.

Ключевые слова: глинистые грунты, влажностное набухание, моделирование напряжений, эквивалентность воздействий, деформации набухания, объемные и поверхностные силы.

Глинистые грунты имеют высокую значимость в сфере строительства, так как очень часто именно они служат основанием для различных зданий и сооружений. В зонах грунтовых массивов, где градиенты влажности достаточно велики, часто возникают явления высокой концентрации напряжений. При сильном набухании может произойти вспучивание грунтов на поверхности, что часто сопровождается повреждением дорожного полотна, подземных коммуникаций, а также фундаментов, что может привести к обрушению зданий и сооружений. Причинами сильного набухания грунтов могут служить подтопления вследствие выпадения чрезмерного количества осадков, повреждения труб водопроводов и др.

Деформации набухания глинистого грунта при увеличении влажности может быть выражена линейной зависимостью

$$\varepsilon_n = \beta \cdot \Delta W .$$

Если уподобить процесс набухания в грунте процессу температурного расширения деформируемой среды, то получим полную аналогию между температурной и влажностной задачами. Тогда система уравнений пространственной задачи для набухающего глинистого грунта, находящегося под воздействием градиента влажности, имеет вид [1, 2]:

уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

уравнение совместности

$$\left. \begin{aligned} (1+\mu)\nabla^2\sigma_x + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + E\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\nabla^2\varepsilon_n + \frac{\partial^2\varepsilon_n}{\partial x^2}\right) &= 0, \\ (1+\mu)\nabla^2\sigma_y + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + E\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\nabla^2\varepsilon_n + \frac{\partial^2\varepsilon_n}{\partial y^2}\right) &= 0, \\ (1+\mu)\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} + E\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\nabla^2\varepsilon_n + \frac{\partial^2\varepsilon_n}{\partial z^2}\right) &= 0, \\ (1+\mu)\nabla^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2 s}{\partial x\partial y} + E\frac{\partial^2\varepsilon_n}{\partial x\partial y} &= 0, \\ (1+\mu)\nabla^2\tau_{yz} + \frac{\partial^2 s}{\partial y\partial z} + E\frac{\partial^2\varepsilon_n}{\partial y\partial z} &= 0, \\ (1+\mu)\nabla^2\tau_{zx} + \frac{\partial^2 s}{\partial z\partial x} + E\frac{\partial^2\varepsilon_n}{\partial z\partial x} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

граничные условия

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n &= 0, \\ \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n &= 0, \\ \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n &= 0, \end{aligned} \right\}$$

где ∇^2 обозначает оператор Лапласа:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

μ - коэффициент поперечного линейного расширения (коэффициент Пуассона),

E - модуль общей линейной деформации,

$s = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ - первый инвариант тензора напряжений,

l, m - направляющие косинусы внешней нормали к поверхности.

Воздействие градиента влажности можно заменить эквивалентным действием объемных и поверхностных сил [3-5]:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{E}{1-2\mu} \cdot \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial x}, \\ Y &= \frac{E}{1-2\mu} \cdot \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial y}, \\ Z &= \frac{E}{1-2\mu} \cdot \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial z}, \end{aligned} \right\}, p = \frac{E}{1-2\mu} \varepsilon_n,$$

где X, Y, Z - проекции объемных сил на оси координат,

p - поверхностная сила, распределенная по граничной поверхности и направленная нормально к этой поверхности.

При этом, для касательных напряжений выполняется тождественное равенство, а нормальные напряжения эквивалентны с точностью до потенциала объемных сил [6, 7]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^p - p, \sigma_y = \sigma_y^p - p, \sigma_z = \sigma_z^p - p, \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^p, \tau_{xz} = \tau_{xz}^p, \tau_{yx} = \tau_{yx}^p, \tau_{yz} = \tau_{yz}^p, \tau_{zx} = \tau_{zx}^p, \tau_{zy} = \tau_{zy}^p, \end{aligned} \right\}$$

где $\sigma_x^p, \sigma_y^p, \sigma_z^p, \tau_{xy}^p, \tau_{xz}^p, \tau_{yx}^p, \tau_{yz}^p, \tau_{zx}^p, \tau_{zy}^p$ - напряжения, возникающие в массиве грунта от действия объемных и поверхностных сил.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. - М.: Стройиздат, 1968, 418 с.
2. Флорин В.А. Основы механики грунтов, т.1, Госстройиздат, 1959, 356 с.
3. Савостьянов В.Н., Агаханов Э.К. Об эквивалентности воздействий в статической задаче механики деформируемого твердого тела. Известия высших учебных заведений. Строительство. 1995. № 10. С. 26-30.
4. Агаханов Э.К., Агаханов М.К. О моделировании действия объемных сил в упругоползучем теле. Известия высших учебных заведений. Северо - Кавказский регион. Технические науки. 2005. № 1 (129). С. 25а-26.
5. Агаханов Э.К., Агаханов М.К. О возможности применения эквивалентности воздействий в аналитических решениях задач теории упругости. Вестник МГСУ. 2010. № 4-3. С. 144-148.

6. Agakhanov E., Sultanova L., Hizriyeva Z., Agakhanov M. Conditions of equivalence of effects for the solid body from incompressible material. В сборнике: MATEC Web of Conferences. 2018. С. 01031.

7. Agakhanov E., Batmanov E., Agakhanov M. The stress-strain state from its own weight in ground base with trapezoidal cutout. В сборнике: MATEC Web of Conferences. 2018. С. 03047.

УДК 512.518

ЗАДАЧА НА РАЗМЕЩЕНИЕ С ОГРАНИЧЕННЫМИ МОЩНОСТЯМИ

З.И. Адеев
ДГТУ, Махачкала

Аннотация: в статье рассматривается многоэкстремальная задача размещения с ограниченными сверху мощностями перерабатывающих предприятий и нелинейными функциями производственных затрат. Предполагается итерационный метод определения плана, близкому оптимальному.

Ключевые слова: многоэкстремальная, размещения, кусочно-линейная функция, мощность, производства, аппроксимация.

Экономико-математическая формулировка задачи размещения, аналогично [2][3], имеет вид: в определенной области (республике, районе и т.д.) имеются m пунктов производства сырья $i=1,2,\dots,m$ и n – пунктов его переработки $j=1,2,\dots,n$. К пунктам переработки относятся действующие предприятия и предприятия, которые планируется строить или расширить. Зная объем производства сырья $a_i > 0$ в каждом пункте i , себестоимость транспортировки единицы сырья C_{ij} , функцию расхода $f_j(y_j)$ при переработке сырья y_j и максимальную допустимую мощность v_j , предприятий, надо определить план $\|x_{ij}\|$ распределения сырья между предприятиями так, чтобы суммарная затрата на транспортировку и переработку были минимальными, т. е. определить план $\bar{x} = \|x_{ij}\|_{mn}$, обобщающий в минимум функцию

$$Z(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n f_j(y_j) \quad (1)$$

где $y_j = \sum_{i=1}^m x_{ij}$ при условии

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i=1,2,\dots,m, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = y_j \leq v_j, \quad j=1,2,\dots,n, \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1,2,\dots,m, \quad j=1,2,\dots,n \quad (4)$$

Обозначим через H_x - множество планов X , удовлетворяющих соотношением (2)-(4). Мощность любого предприятия ограничена снизу некоторой величиной. Поэтому, исследуем функцию $f_j(y_j)$ на интервале $0 \leq \delta \leq y_j \leq \beta = \max_j \{v_j\}$ полагая $f_j(y_j) = M$ - достаточно большое, при $0 < y_j < \delta$ и $y_j > \beta$, $f_j(y_j) = 0$ при $y_j = 0$. Предположим, что функция $f_j(y_j)$ кусочно-непрерывная, а функция $\varphi_j(y_j) = f_j(y_j)/y_j$ невозрастающая для всех y_j из интервала $\delta \leq y_j \leq \beta$.

Выберем в интервале $\delta \leq y_j \leq \beta$, p точек, так, что

$$\delta = b_2 < b_3 < \dots < b_p < b_{p+1} = \beta + 2, \quad \varepsilon > 0 - \text{малое число и } f_j(y_j)$$

непрерывна на каждом отрезке $[b_p, b_{p+1}]$. Обозначим

$$d_{jk} = \frac{1}{b_{k+1} - b_k} \int_{b_k}^{b_{k+1}} \varphi_j(t) dt, \quad d_{j1} = \varphi_j(\delta).$$

Фактически мы усредняем функции себестоимости на отрезке $[b_p, b_{p+1}]$.

Заменим функцию $f_j(y_j)$ на отрезке $[\delta, \beta]$ прямыми $\hat{f}_j(y_j) = d_{jk}y_j$, $y_j \in [b_k, b_{k+1}]$. Отрезок прямой $d_{jk}y_j$, где $y_j \in [b_k, b_{k+1}]$ называется k -ой аппроксимацией функции $f_j(y_j)$.

По теореме о среднем существует точка $t_{jk} \in [b_p, b_{p+1}]$ такая, что $d_{jk}t_{jk} = \varphi_j(t_{jk}) = f_j(t_{jk})$. каждая прямая пересекается с кривой $f_j(y_j)$ внутри отрезка $[b_k, b_{k+1}]$.

Кусочно-линейная функция $\hat{f}_j(y_j) = \sum_{k=1}^p d_{jk} \lambda_{jk} y_j$, где λ_{jk} равна единице, если $y_j \in [b_k, b_{k+1}]$ иначе нулю, аппроксимируем функцию $f_j(y_j)$ на отрезке $[\delta, \beta]$ с любой точностью при достаточно большом p .

Тогда задачу (1)-(4) можно аппроксимировать следующим образом: найти план $\bar{x} = \|x_{ij}\|_{mn}$ обращающей в минимум функцию

$$Z(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} + \sum_{k=1}^p d_{jk} \lambda_{jk}) x_{ij} \quad (5)$$

при ограничения (2)-(4) и условии, что λ_{jk} равна единице, если $y_j \in [b_k, b_{k+1}]$ иначе нулю.

Последнюю задачу можно было бы решать методом динамического программирования, перебирая значение y_j из различных интервалов так, чтобы выполнялись условия $\sum_{j=1}^n y_j = \sum_{i=1}^m a_i$, $a \leq y_j \leq v_j$, и решая соответствующие

транспортные задачи. Число решаемых транспортных задач будет очень велико так, что этот метод практически не пригоден.

Ниже описывается приближенный метод решения задачи (2) - (4), где надо решать не более nr транспортных задач. Если бы заранее были известны оптимальные значения мощности y_j , можно было бы заменить $f_j(y_j)$ соответствующими линейными аппроксимациями и решив получившуюся задачу получить решение (2) - (5).

Предлагается следующий вариант.

Пусть $\bar{y}_j, j = 1, 2, \dots, n$, оптимальные значения мощностей и \bar{c}_{ij} , соответствующие им линейно организованные транспортные коэффициенты функции (5). $\bar{c}_{ij} = c_{ij} + d_j \theta_j$, где θ_j определяется условиями $b\theta_j \leq \bar{y}_j \leq b\theta_j + 1$. Последовательно для $r=1, 2, \dots, n$ вычисляется значение мощностей y_r оценивающие сверху и снизу \bar{y}_r :

1. Для вычисления значения мощности y_r оценивающие сверху y_r при $j = 1, 2, \dots, r+1 \dots n$ выбирается первая аппроксимация функции $f_j(y_j)$ и решается задачи линганизации при $\gamma=1$ (γ - номер аппроксимации) функции

$$F_{\gamma r}(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=r}^m (c_{ij} + d_{j\gamma}) x_{ij} + \sum_{i=1}^m (c_{ir} + \sum_{k=1}^p d_{rk} \lambda_{rk}) x_{ik} \quad (6)$$

$$\text{на множестве } H_x = \left\{ x / \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_j, \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq v_j, x_{ij} \geq 0 \right\}.$$

В (6) нелинейная лишь r -я составляющая. Минимум (6) на H_x можно получить по алгоритму $\bar{A1}$.

Пусть $\bar{x}(\gamma, r)$ - оптимальное решение задачи (6)

$$\bar{y}(\gamma, r) = \sum_{i=1}^m x_{ij}(\gamma, r), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Оптимальные значение мощности \bar{y}_j , больше или равно нулю, следовательно $c_{ij} + d_j \theta_j \leq d_{j\gamma}$ (при $\gamma=1$) и из следствия Γ^0 решение задачи R следует неравенство $\bar{y}_r(\gamma, r) \geq \bar{y}_r, \gamma = 1, r = 1, 2, \dots, n$.

2. Для вычисление значение мощностей y_r оценивающие снизу \bar{y}_r при $j=1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, n$ выбирается последние аппроксимации функции $f_j(y_j)$ и решается задача минимизации (при $\gamma=1$) функции:

$$T_{p-\gamma, r}(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=r}^m (c_{ij} + d_j \gamma_j) x_{ij} + \sum_{i=1}^m (c_{ir} + d_{r\gamma}) x_{ir} \quad (7)$$

где $\{\gamma_j\}$ - номера аппроксимации определяется из условия

$$b_{\gamma\tau} \leq v_j \leq b_{\gamma_j+1}, \quad j=1,2,\dots,r-1,r+1,\dots,n \quad \text{на множестве}$$

$$H_x = \left\{ x / \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_j, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq v_j, \quad x_{ij} \geq 0 \right\}$$

Оптимальное решение $\tilde{x}(\gamma, r) \in H_x$ задача (7) аналогично (6) определяется по алгоритму $\bar{A}1$.

3. Тогда имеет место следующие неравенства

$$\bar{y}_r \geq \bar{y}_r(\gamma, r) = \sum_{i=1}^m \bar{x}_r(\gamma, r), \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad \gamma = 1,$$

так как оптимальные значения мощностей y_j не более v_j и

$$c_{ij} + d_j \theta_j \leq c_{ij} + d_j \gamma_j, \quad j=1,2,\dots,r-1,r+1,\dots,n$$

при минимизации (6) и (7) для $\gamma = 1, \quad r = 1, 2, \dots, n$ можно сузить область H_x , вводя после решения очередной задачи получили значения $y_r = \bar{y}_r(\gamma, \tau)$ и $y_r = \bar{y}_r(\gamma, \tau)$ ограничения вида:

$$\bar{y}_r(\gamma, \tau) \leq \sum_{i=1}^n x_{ir} \leq \bar{y}_r(\gamma, \tau)$$

Таким образом, будет решаться задачи (при $\gamma = 1$)

$$F_{\gamma r}(\bar{x}(\gamma, r)) = \min_{H(r)} F_{\gamma r}(x), \quad (8)$$

$$T_{p-\gamma, r}(\bar{x}(\gamma, r)) = \min_{H(r)} T_{p-\gamma, r}(x) \quad (9)$$

где

$$H(r) = \left\{ x / x \in H_x; \quad \bar{y}_j(\gamma, j) \leq \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq \bar{y}_j(\gamma, j), \quad j = 1, 2, \dots, n \right\}$$

$$\bar{y}_r(\gamma, j) = \sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij}(\gamma, j), \quad b_{\theta_j} \leq \bar{y}_j(\gamma, j) \leq b_{\theta_{j+1}} \leq \sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij}(\gamma, j).$$

Если бы были известны те j , для которых $\bar{\theta}_j = 1$ и $\bar{\theta}_j = \gamma_j$ ($\bar{\theta}_j$ – номер интервала, которому принадлежит оптимальное значение y_j), то увеличив номер аппроксимации γ на единицу для остальных j и применив снова описанный выше процесс, мы бы получили более точную оценку сверху и снизу для оптимальных значений мощностей y_j .

При этом для каждого $r, \quad r=1, 2, \dots, n$ надо было бы решить не более P задач вида (8) и (9), так как при увеличении γ и уменьшении γ_j для $f_r(y_r)$ следует брать в качестве исходной w_r – аппроксимации, где номер интервала, которому принадлежит $\bar{y}_r(\gamma - 1, \tau)$ полученный на предыдущем цикле. На возможность проверки условий $\bar{\theta}_j = \gamma_j$ или

$\bar{\theta}_j = \gamma$ требует для реализации такой схемы тех или иных процессов перебора, что связано с решением большого число транспортных задач.

Ниже описывается приближенный метод, где такой перебор отсутствует, а достаточно хороший план получается в результате процесса, требующего решения не более nr транспортных задач типа (8).

При описываемом методе при определении $\bar{x}(\gamma, r) \in H(s)$ значения γ увеличивается на единицу для всех j , таких, что $\bar{y}_j(p - \gamma, j) \leq b_{\gamma+1} \leq \bar{y}_j(\gamma, j)$ или $\bar{y}_j(p - \gamma, j) \leq b_{\gamma j} - \mathcal{Y} \leq \bar{y}_j(\gamma, j)$ иначе $\gamma = \theta_j$, где θ_j определяется из условия $b_{\theta_j} \leq \bar{y}_j(\gamma, j) \leq b_{\theta_j+1}$, иначе из условия $b_{\theta_j} \leq \bar{y}_j(\gamma, j) \leq b_{\theta_j+1}$. так как $\bar{y}_j(p - \gamma, j) \leq \bar{y}_j(\gamma, j)$ (это следует из следствия I^0) θ_j – однозначно определяется.

При решении задачи (8) определения $\bar{x}(p - \gamma, r)$ значения γ_j уменьшается на единицу для всех j , таких, что $b_{\gamma-1} \geq \bar{y}_j(p - \gamma, j)$. Если $b_{\gamma j-1} \leq \bar{y}_j(p - \gamma, j)$, то $\gamma_j = \theta_j$, где θ_j определяется из условия $b_{\theta_j} \leq \bar{y}_j(\gamma, j) \leq b_{\theta_j+1}$.

Для увеличения точности метода в него включается процесс локального увеличение плана. Пусть получен $x(\gamma, r)$ -оптимальный опорный план задачи (7).

Вычислим значение (выпуклой вверх) целевой функции (5) в некоторых опорных планах H_x смежных с $x(\gamma, r)$. Если среди них найдется такой, где значение (5) меньше $\hat{z}(x(\gamma, r))$, перейдем к этому плану и рассмотрим некоторые опорные планы, смежные с ним и т.д. При каждом переходе новый опорный план целевой функции (5) строго убывает так, что такой процесс окончится через конечное число шагов. Из всех смежных опорных планов проверяется лишь незначительная часть.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. Издательство: Мир М: 1967.
2. Алибеков Б.И. Приближенный метод определение глобального экстремума сепарабельной функции на выпуклом многограннике. В. Сб. Труды математического факультета. Выпуск 5. Воронеж, изд. ВГУ, 1971.
3. Алибеков Б.И. Приближенный метод решения многоэкстремальной задачи размещения. Труды 4-ой зимней школы

по математическому программированию и смежным вопросам. М.: 1971.

УДК 624.131.3

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К ОБОСНОВАНИЮ МЕТОДИКИ ОБОБЩЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ДЕФОРМИРУЕМОСТИ ГРУНТОВ РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ

**Агаверди С. Айдаев, ДГТУ, Махачкала
Амир С. Айдаев, МГСУ, Москва**

Аннотация: в статье приводится вероятностно-статистический подход к обобщению результатов определений деформационных характеристик грунтов оснований сооружений. Определяется общая дисперсия модуля деформации с учетом случайных отклонений.

Ключевые слова: грунт, деформационные характеристики, неоднородность грунтов, изменчивость характеристик, штамповые и компрессионные испытания, корректирующие коэффициенты, моменты закона распределения.

При проектировании зданий и сооружений для получения инженерно-геологической информации о площадке строительства используется комплекс прямых и косвенных методов. Связано это как с невозможностью получения необходимой информации одним методом, так и желанием максимально использовать данные различных методов при обобщении полученных материалов. Точность и стоимость определений отдельными методами, а также исследуемые характеристики различны. Считается, что использование нескольких методов повышает качество и количество получаемой информации путем выявления различных физических особенностей грунтового массива.

Если характеристики физического состояния в основном определяются лабораторными методами, то при оценке деформируемости в качестве эталонного метода принято штамповые испытания, а при исследовании показателей прочностных свойств – испытания на срез в полевых условиях [5]. Поэтому получаемые другими методами параметры должны быть приведены в

соответствие с данными указанных методов. В этих целях выполняются параллельные испытания эталонным методом. (обязательно для сооружений I –го класса и во многих случаях 2-го класса [5]) или же используются корректирующие коэффициенты и таблицы данных, полученные для однотипных грунтов путем совместной статистической обработки результатов испытаний.

В целом такой подход к получению инженерно-геологической информации с точки зрения ускорения и удешевления исследований не вызывает возражений. Однако при этом должны быть учтены граничные условия различных экспериментов (Особенности отдельных методов, область воздействия эксперимента), физическая суть определяемых различными методами характеристик, а при обработке результатов обосновать соответствующий статистический метод. При выборе последнего важное значение будет иметь изменчивость характеристик грунтов, связанную с их неоднородностью и особенности строения исследуемого грунтового массива.

Необходимость учета указанных факторов наглядно видно при сопоставлении результатов штамповых и компрессионных испытаний. Действительно, ввиду сложности и трудоемкости организации штамповых испытаний в массовом строительстве и при необходимости оценки неоднородности оснований, часто используются компрессионные исследования, проводимые в лабораторных условиях. Однако, последний метод дает заниженные результаты [1]. Для корректировки полученных при это характеристик параллельно проводятся штамповые испытания. При проектировании зданий 3 класса допускается корректировка данных, полученных в лабораторных условиях, с помощью эмпирических коэффициентов [5], которые установлены путем статистической обработки результатов параллельных испытаний однотипных грунтов.

Такой подход к оценке корректирующих коэффициентов содержит в себе ряд недостатков, однако, подобное обобщение стало традиционным, несмотря на то, что результаты этих методов различаются по физической сути. Известное принципиальное различие состоит в особенностях сжатия грунта под штампом и в компрессионном приборе. Вместе с тем, имеется ряд причин, которые в достаточной степени влияют на показатели деформируемости по результатам использования этих методов.

Результаты штамповых испытаний являются интегральными характеристиками и отражают деформируемость грунта не в точке, а в пределах активной зоны сжатия. Размеры этой зоны могут достигать нескольких метров и зависят от площади штампа и интенсивности давления. Под штампом грунтовая толща испытывает неоднородное напряженное состояние, которое формирует неоднородность деформируемости толщи по глубине. В пределы зоны сжатия могут попасть различные слои грунтов, отличающиеся по деформируемости, или может иметь место начальная непрерывная изменчивость деформируемости.

При лабораторных исследованиях образцы воспринимают фиксированные постоянные напряжения без возможности бокового расширения.

Модуль деформации по данным штамповых испытаний рассчитывается по формуле [3]

$$E_{ш} = \frac{(1-\nu^2) \cdot \omega \cdot d \cdot P}{S_{ш}} \quad (1)$$

где ν – коэффициент поперечной деформации, равный для песков и супесей 0,27; для суглинков 0,35; для глин 0,42;

ω – безразмерный коэффициент, равный для круглого штампа 0,79;

d – диаметр штампа;

P – давление под штампом;

$S_{ш}$ – осадка штампа, соответствующая давлению P .

Модуль деформации по данным компрессионных испытаний равен [3]

$$E_{к} = \frac{\beta \cdot h \cdot P}{S_{к}} \quad (2)$$

где β – коэффициент, равный для песков и супесей 0,74; суглинков 0,62 и глин 0,42;

h – начальная высота образца;

P – давление на образец;

$S_{к}$ – осадка образца, соответствующая давлению P .

Отношение модулей деформации, рассчитанных по данным штамповых и компрессионных испытаний, равно

$$m_{к} = \frac{E_{ш}}{E_{к}} = \frac{(1-\nu^2) \cdot \omega \cdot d \cdot S_{к}}{\beta \cdot h \cdot S_{ш}} \quad (3)$$

При площади подошвы штампа 5000 см², высоте кольца компрессионного прибора 2,5 см для песков и супесей

корректирующий коэффициент по выражению (3) $m_k = 31,1 \cdot S_k / S_{ш}$, суглинков $m_k = 36,3 \cdot S_k / S_{ш}$ и глин $m_k = 52,5 \cdot S_k / S_{ш}$. По данным табл. 22 [5] при коэффициенте пористости $e=0,65$ корректирующий коэффициент равен: для супесей $m_k = 3,5$; для суглинков $m_k = 4,5$ и для глин $m_k = 6$. При этом имеем для супесей $S_{ш} = 8,86 \cdot S_k$, для суглинков $S_{ш} = 8,07 \cdot S_k$ и для глин $S_{ш} = 8,75 \cdot S_k$, т.е. соотношение между осадками штампа и компрессии в данном случае в пределах имеющей место точности независимо от вида грунта практически остается постоянным.

С учетом формы штампа выражение (3) можно представить в виде

$$m_k = \frac{h_э \cdot S_k}{h \cdot S_{ш}}, \quad (4)$$

где $h_э$ – мощность эквивалентного слоя, равная $h_э = A \cdot \omega_{кв} \cdot e$, причем

$$A = (1 - \nu^2) / \beta, \text{ а } \omega \approx 0,887 \cdot \omega_{кв};$$

b – ширина подошвы квадратного штампа, эквивалентного по площади подошвы круглому штампу;

$\omega_{кв}$ – табличный коэффициент [3].

Учитывая, что мощность сжимаемой толщи под штампом $H=2h_э$, имеем

$$m_k = \frac{H \cdot S_k}{2h \cdot S_{ш}} \quad (5)$$

Отсюда корректирующий коэффициент m_k равен половине отношения относительных осадок компрессии ε_k и штампа $\varepsilon_{ш}$

$$m_k = 0,5 \cdot \varepsilon_k / \varepsilon_{ш} \quad (6)$$

Из (6) видно, что относительная осадка штампа во много раз меньше относительной осадки компрессии. По-видимому, здесь причина состоит в различии мощности сжимаемой толщи под штампом и толщины образца при компрессии, а также в отличии характера распределения напряжений в этих случаях.

По данным табл. 22 на стр. 33 [5] значения m_k уменьшаются с увеличением коэффициента пористости грунта. Следовательно, модуля деформации по данным компрессионных и штамповых испытаний в среднем более близки между собой при слабых грунтах и их различие растет с упрочнением грунтов. Отсюда вывод, что погрешность определения модуля деформации по компрессионным данным является мультипликативной, т.е. зависящей от величины модуля деформации конкретного грунта и она увеличивается с возрастанием его значений.

Относительная близость значений модулей деформации по данным этих методов в случае слабых грунтов связано с тем, что корректирующие коэффициенты (табл. 22 [5]) получены для интервала давления (0,1+0,2) мПа. Хотя под штампом давление с глубиной падает, слабые грунты достаточно деформируются при незначительных давлениях, в связи, с чем осадка штампа $S_{ш}$ увеличивается и модуль деформации по эти данным становится несколько ближе к значениям, полученным по результатам компрессионных испытаний.

Вопрос о возможности сопоставления модулей деформации, полученных лабораторными и полевыми методами, как обычно принято, в случае неоднородных массивов грунтов является весьма проблематичным. При этом, важное значение приобретает слоистость, непрерывная изменчивость характеристик грунтов и т.д. Эти факторы необходимо учитывать также при определении модуля деформации по данным зондировочных испытаний, т.к. непрерывная изменчивость и слоистость будут сказываться на величине сопротивления зондированию.

При сравнении значений модуля деформации по данным компрессионных и штамповых испытаний коэффициент m_k определяется путем их совместной статистической обработки для отдельных видов грунтов при фиксированных интервалах изменения давления и коэффициента пористости. Компрессионные испытания проводятся на образцах, отобранных с различных глубин, при фиксированном интервале изменения давления. Это обстоятельство исключает влияние неприкосновенного состояния на значения модуля деформации. Напряжения под штампом будут отличны от воспринимаемых образцами в компрессионных приборах. Если по данным компрессии модуль деформации рассчитать для интервалов давлений, соответствующих на данной глубине напряжениям под штампом, то может иметь место непрерывная изменчивость модуля деформации по глубине. Непрерывная изменчивость, обусловленная как неоднородностью напряженного состояния, так и природными факторами, связанными с особенностями исследуемой толщи, скажется на моментах закона распределения модуля деформации. Кроме того, при определении моментов закона распределения модуля деформации осреднением без учета изменчивости, их значения будут зависеть от детальности опробования по глубине. Например, при увеличении модуля деформации с глубиной и сосредоточении точек

опробования в верхней части основания среднее значение будет меньше фактического. Если же большее количество точек опробования сосредоточить в нижней части, то среднее значение будет больше фактического.

Если законы распределения модуля деформации, рассчитанного с учетом его изменчивости и обычным осреднением, будут отличаться статистически несущественно, то корректирующий коэффициент можно установить по принятому на практике методу.

При наличии непрерывной изменчивости g -й момент закона распределения с учетом влияния размера обобщаемой области можно определить из выражения

$$M_g[E] = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} [E(z)]^g \cdot d \cdot z \quad (7)$$

где $(\beta - \alpha)$ – размер обобщаемой области;

$E(z)$ – функция, описывающая изменение модуля деформации.

При известных первых четырех моментах плотность и функция закона распределения восстанавливаются при помощи ряда Шарлье

$$f(E) = \frac{1}{\sigma} \left[\varphi_0(z) - \frac{1}{6} \frac{M_3}{\sigma^3} \varphi_0^{(3)}(z) + \frac{1}{24} \left[\frac{M_4}{\sigma^4} - 3 \right] \varphi_0^{(4)}(z) \right] \quad (8)$$

где M_3 и M_4 – соответственно третий и четвертый центральные моменты;

σ – среднее квадратическое отклонение;

$$z = \frac{\sigma_1 - M_1}{\sigma}$$

где M_1 – первый начальный момент;

$\varphi_0(z)$, $\varphi_0^{(3)}(z)$, $\varphi_0^{(4)}(z)$ - табличные коэффициенты [1]

$$F(E) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \varphi(z) - \frac{1}{6} \cdot \frac{M_3}{\sigma^3} \cdot \varphi_0^{(2)}(z) + \frac{1}{24} \left(\frac{M_4}{\sigma^4} - 3 \right) \cdot \varphi_0^{(3)}(z) \quad (9)$$

где $\varphi_0^{(2)}(z)$ - табличный коэффициент [2].

Допустим, что изменение модуля деформации по глубине описывается полиномом второй степени

$$E(z) = C_0 + c_1 z^1 + c_2 z^2 + \delta \quad (10)$$

где δ – нормально распределенные случайные величины с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией s^2 ;

c_i – коэффициенты полинома.

При ограниченном объеме информации значения моментов высоких порядков будут содержать погрешности. Поэтому приведем выражения для определения первых двух моментов (выражения для определения моментов более высоких порядков приведены в [2,4]).

Первый начальный M_1 - второй центральный моменты M_2 определяются из выражений [3]:

$$M_1 = C_0 + 0,5 \cdot [c_1 + 0,5 \cdot c_2 (\alpha + \beta)] \cdot 0,5 \cdot (\alpha + \beta) + \frac{c_2}{12} \cdot (\beta - \alpha)^2 \quad (11)$$

$$M_2 = \frac{(\beta - \alpha)^2}{4} \cdot \left[\frac{1}{3} [c_1 + c_2 (\alpha + \beta)]^2 + \frac{c_2}{20} \cdot (\beta - \alpha)^2 \right] \quad (12)$$

Общая дисперсия будет равна

$$\sigma^2 = M_2 + S^2 \quad (13)$$

где S^2 – дисперсия, обусловленная случайными отклонениями.

Из выражения (12) видно, что степень влияния непрерывной изменчивости на стандарт возрастает с увеличением мощности обобщаемой области, а также значений коэффициентов полинома C_1 и C_2 . К особенно быстрому возрастанию приводит увеличение значения коэффициента C_2 .

Сравнение средних значений и дисперсий модуля деформации по данным компрессионных испытаний, рассчитанных осреднением и по выражениям (11) и (13), можно производить при помощи критериев Стьюдента и Фишера [2]. Если по обоим критериям различие статистически несущественно, то обработку данных можно производить обычным осреднением. В случае существенного различия необходимо, пользуясь соотношениями (11) и (12), рассчитать средние значения и дисперсии модуля деформации по каждой выработке и при определении корректирующих коэффициентов использовать полученные значения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айдаев А.С., Загиров Ш.Ш., Юсупов А.К. Способ оценки статистических характеристик деформируемости оснований по данным компрессионных испытаний. И.л. ДагЦНТИ №19-77. – Махачкала, 1977.
2. Ветцель Е.С. «Теория вероятностей», М., 1989, - 572 с.
3. Далматов Б.И. и др. «Механика грунтов» ч.1. Основы геотехники. М-С-Пб, 2000. - 204с.
4. Загиров Ш.Ш., Зиятханов И.О., Аллаев М.О., Айдаев А.С. Теоретические и методологические аспекты оптимального комплексирования методов исследований оснований сооружений. ДГТУ, Махачкала. 2002. - 109с.
5. Пособие по проектированию оснований зданий и сооружений. - М.: «Стройиздат», 1986, - 415с.

УДК 377.6

ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ НАПРАВЛЕННОСТЬ ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В СИСТЕМЕ СПО ПО ТЕХНИЧЕСКОМУ ПРОФИЛЮ

**Х.Р. Алиева
АДК, Махачкала**

Аннотация: в статье приводятся основные аспекты профессиональной направленности преподавателя математики в системе СПО по техническому профилю. Рассматривается профессиональная направленность обучения математике, ее значение для овладения студентами будущей профессии.

Ключевые слова: профессиональная направленность, практические задачи, математическое познание, технический профиль, технический прогресс, научные знания, теоретический материал.

Обучать и воспитывать молодое поколение – это основная задача общества, где основную роль играет воспитатель, учитель и преподаватель. От этого зависит будущее страны, ее материальный и технический прогресс. При этом ожидают, что школа поможет воспитать из ребенка полноценного человека и гражданина, а колледж и вуз сделает из него хорошего специалиста. Среди основного требования, которая предъявляет страна к учащемуся и студенту является тесная связь теории с практикой и ее применение в жизни, на производстве.

С возрастающей скоростью изменяются условия работы и жизни современного общества. Изобретения и научные открытия, которые вчера были научными исследованиями, сегодня уже используются в жизни. Так, например, лазеры, которые недавно были известны в специальных лабораториях, то сегодня они используются в медицине, на производстве и т.д. Поэтому в настоящее время очень важно прививать учащихся и студентов в единстве научных знаний и их применение на практике, а также в необходимости ясно и четко формулировать свои мысли [1].

Способность логически мыслить и четко и ясно излагать свои мысли требуется каждому. В этих качествах нуждается каждый руководитель и специалист любой профессии. Поэтому вопросы развития речи и мышления являются основными в жизни учащихся и студентов. Этим должны заниматься все – и учителя, и преподаватели, внося теорию на практику, присущее его специальности.

Особую роль в этом должны играть учителя и преподаватели математики, которые должны научить учащихся и студентов к четкому, ясному и логически полноценному изложению мысли. Для этого математика имеет большие возможности, которые проявляются и при изложении теоретического материала, и при решении практических задач.

При этом недостаточно только запомнить определения или рассуждения, чтобы ответить на тот или иной теоретический вопрос, которое было услышано на уроке от преподавателя при доказательстве той или иной теоремы. Для этого нужна постоянная готовность, отвечать на дополнительные вопросы преподавателя, т.е. нужно понимание сути данного вопроса или темы, к изменению обозначений и смене чертежа.

Ученик и студент должен уметь показать в своем ответе не только знание чистой теории, определений, теорем и формул и умение их запомнить, а уметь самостоятельно мыслить и применить эти знания на практике при решении примеров и задач.

Математическое познание доставляет удовлетворение тогда, когда проникают в суть основных понятий и идей этой науки и почувствуют внутреннюю связь всех звеньев рассуждений.

Если учащиеся и студенты достигли ясность в понимании сути определений, формул и теорем и внутренних связей понятий и рассуждений, то они перестанут тратить время на механическое заучивание материала без понимания.

Профессиональная направленность преподавателя математики в системе СПО по техническому профилю ориентировано на применение математики при решении задач и примеров связанные с техникой и на простых примерах и задачах объяснит различные темы.

Рассмотрим это на примерах.

Пример 1. Тело движется по прямолинейно по закону $S(t) = 3t^3 - 4t + 2$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t = 3$.

Решение. Если известен закон движения как функция времени, то скорость и ускорение – это соответственно первая и вторая производные по времени, т.е. $\mathcal{V}(t) = S'(t) = 9t^2 - 4$.

Тогда $\mathcal{V}(3) = S'(3) = 9 \cdot 3^2 - 4 = 77 \text{ м/с}$ и $a(t) = S''(t) = 18t$,
 $a(3) = S''(3) = 18 \cdot 3 = 54 \text{ м/с}^2$.

Ответ. 77 м/с и 54 м/с^2 .

Пример 2. Тело движется по прямой так, что в момент времени t скорость равна $\mathcal{V}(t) = 12 - 0,4t \text{ (м/с)}$. Найдите пройденный путь телом за время от 2 до 8 секунд.

Решение. Так как пройденный путь вычисляется по формуле $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{V}(t) dt$ и $t_1 = 2, t_2 = 8$, то имеем: $S = \int_2^8 (12 - 0,4t) dt = \left(12t - 0,4 \frac{t^2}{2} \right)_2^8 = (12t - 0,2t^2)_2^8 = (12 \cdot 8 - 0,2 \cdot 8^2) - (12 \cdot 2 - 0,2 \cdot 2^2) = 96 - 12,8 - 24 + 0,8 = 60$.

Ответ. 60 м.

Пример 3. Тело движется со скоростью $\mathcal{V}(t) = 3t^2 - 1 \text{ (м/с)}$. Найти закон движения $S(t)$, если в начальный момент времени тело находилось на расстоянии 5 см от начала отсчета.

Решение. Так как $dS = \mathcal{V}(t) \cdot dt = (3t^2 - 1) dt$, то $S(t) = \int (3t^2 - 1) dt = t^3 - t + C$. Из условия следует, что если $t = 0$, то $S = 5 \text{ м} = 0,05 \text{ км}$. Подставив эти данные в полученное уравнение, имеем $S(t) = t^3 - t + C$, откуда $C = 0,05$. Тогда искомое уравнение принимает вид $S(t) = t^3 - t + 0,05$.

Ответ. $S(t) = t^3 - t + 0,05$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б.В. Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математики. М.: Просвещение, 1982, 144 с.
2. Шуберт Ю.Ф., Андреещева Н.Н. Формирование у студентов профессиональных компетенций // Среднее профессиональное образование. – М., 2009. - №12.
3. Панфилова А.П. Инновационные педагогические технологии: учеб. пособие. М.: Академия, 2011. - 192 с.
4. Якупова А.Р. Чернявская В.И. Компетентностная модель специалиста технического профиля // Научные исследования в

образовании. Приложение к журналу «Профессиональное образование. Столица». – М., 2009. - №6.

5. Бакланова Н.Б. Математика. Общий курс: учебное пособие / Н. Б. Бакланова. — 2-е изд., испр. и доп. — Йошкар-Ола: МарГУ, 2019, 548 с.

6. Учебно-методическое пособие для выполнения контрольных работ по дисциплине «Математика» / составители В.Н. Веретенников. — Санкт-Петербург: Российский государственный гидрометеорологический университет, 2013. — 70 с.

УДК 624.131.3

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КОМПРЕССИОННЫХ И ШТАМПОВЫХ ИСПЫТАНИЙ ГРУНТОВ С ЦЕЛЬЮ ИХ КОМПЛЕКСИРОВАНИЯ

**М.О. Аллаев
ДГТУ, Махачкала**

Аннотация: в статье приводится методика определения значения корректирующих коэффициентов между штамповыми и компрессионными испытаниями с целью уточнения деформационных характеристик грунтов путем их совместной статистической обработки при фиксированных интервалах изменения давления и коэффициента пористости.

Ключевые слова: модуль деформации, корректирующий коэффициент, изменчивость, неоднородность, дисперсия, закон распределения, моменты третьего и четвертого порядка.

При проектировании фундаментов используется набор методов с целью определения одних и тех же, или различных параметров оснований. Один и тот же параметр можно определить различными методами, которые могут отличаться по точности, стоимости, а в некоторых случаях некоторым отклонением физической сути показателя от данных эталонного метода, а это может иметь решающее значение в определенных условиях. Последнее можно наглядно проиллюстрировать путем сопоставления результатов штамповых и компрессионных испытаний с целью определения деформационных характеристик грунтов.

Действительно, ввиду сложности и трудоемкости организации штамповых испытаний в массовом строительстве и при необходимости оценки неоднородности оснований, часто используются компрессионные исследования в лабораторных условиях. Последний метод даёт заниженные результаты. Для корректировки полученных при этом характеристик параллельно проводятся штамповые испытания. При проектировании зданий 3 класса допускается корректировка данных, полученных в лабораторных условиях, с помощью эмпирических коэффициентов Агишева [1], которые установлены путем статистической обработки результатов параллельных испытаний однотипных грунтов.

Методическая погрешность между данными компрессионных испытаний по отношению к штамповым может быть определена и количественно оценена путем формального описания при помощи математической модели измерительной процедуры [1].

Модуль деформации по данным штамповых испытаний рассчитывается по формуле [2]

$$E_{ш} = \frac{(1 - \nu^2) \omega d p}{S_{ш}} \quad (1)$$

где ν — коэффициент поперечной деформации, равный для песков и супесей 0,27; для суглинков 0,35; для глин 0,42; ω - безразмерный коэффициент, равный для кругового штампа 0,79; d - диаметр штампа; p - давление под штампом; $S_{ш}$ - осадка штампа, соответствующая давлению p .

Модуль деформации по данным компрессионных испытаний равен [3]

$$E_k = \frac{\beta h p}{S_k}, \quad (2)$$

где β - коэффициент, равный для песков и супесей 0,74; для суглинков 0,62 и для глин 0,42; h - начальная высота образца; p - давление на образец; S_k - осадка образца, соответствующая давлению p .

Отношение модулей деформации (корректирующий коэффициент), рассчитанных по данным штамповых и компрессионных испытаний, равно

$$m_k = \frac{E_{ш}}{E_k} = \frac{(1 - \nu^2) \omega d S_k}{\beta h S_{ш}} \quad (3)$$

С учетом формы штампа выражение (3) можно представить в виде

$$m_k = \frac{h_3 S_k}{h S_{ш}}, \quad (4)$$

где h_3 - мощность эквивалентного слоя, равная $h_3 = A\omega_{кв} b$, причем $A = (1 - \nu^2)/\beta$, а $\omega = 0,887 \omega_{кв}$; b - ширина подошвы квадратного штампа, эквивалентного по площади подошвы круглому штампу; $A\omega_{кв}$ - табличный коэффициент [3].

По данным табл. 22 [3] значения m_k уменьшаются с увеличением коэффициента пористости грунта. Следовательно, модули деформации по данным компрессионных и штамповых испытаний в среднем более близки между собой при слабых грунтах и их различие растет с упрочнением грунтов. Это означает, что погрешность определения модуля деформации по компрессионным данным является мультипликативной, т.е. зависящей от величины модуля деформации конкретного грунта и увеличивается с возрастанием его значения.

При сравнении значений модуля деформации по данным компрессионных и штамповых испытаний коэффициент m_k определяется путем их совместной статистической обработки для отдельных видов грунтов при фиксированных интервалах изменения давления и коэффициента пористости.

Непрерывная изменчивость, обусловленная как неоднородностью напряженного состояния, так и природными факторами, связанными с особенностями исследуемой толщи, скажется на моментах закона распределения модуля деформации. Кроме того, при определении моментов закона распределения модуля деформации осреднением без учета непрерывной изменчивости их значения будут зависеть от детальности опробования по глубине. Например, при увеличении модуля деформации с глубиной и сосредоточении точек опробования в верхней части основания среднее значение будет меньше фактического. Если же большее количество точек опробования сосредоточить в нижней части, то среднее значение будет больше фактического.

При наличии непрерывной изменчивости g - й момент закона распределения с учетом влияния размера обобщаемой области можно определить из выражения

$$M[g] = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} [E(z)]^g dz, \quad (5)$$

где $(\beta - \alpha)$ - размер обобщаемой области; $E(z)$ - функция, описывающая изменение модуля деформации.

При известных первых четырех моментах плотность и функция закона распределения восстанавливаются при помощи ряда Шарлье [5, 6]

$$f(E) = \frac{1}{\sigma} \varphi_0(z) - \frac{1}{6} \frac{M_3}{\sigma^3} \varphi_0^3(z) + \frac{1}{24} \left[\frac{M_4}{\sigma^4} - 3 \right] \varphi_0^4(z), \quad (6)$$

где M_3 и M_4 - соответственно третий и четвертый центральные моменты; σ - среднеквадратическое отклонение; $z = (E_p - M_1) / \sigma$, где M_1 - первый начальный момент, $\varphi_0(z)$, $\varphi_0^{(3)}(z)$, $\varphi_0^{(4)}(z)$ - табличные коэффициенты [4].

$$F(E) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi(z) - \frac{1}{6} \frac{M_3}{\sigma^3} \varphi_0^2(z) + \frac{1}{24} \left[\frac{M_4}{\sigma^4} - 3 \right] \varphi_0^3(z), \quad (8)$$

где $\varphi_0^{(2)}(z)$ - табличный коэффициент [4].

Допустим, что изменение модуля деформации по глубине описывается полиномом второй степени

$$E(y) = C_0 + C_1 y + C_2 y^2 + \delta, \quad (9)$$

где δ - нормально распределенные случайные величины с математическим ожиданием, равным нулю и дисперсией S^2 ; C_i - коэффициенты полинома.

При ограниченном объеме информации значения моментов высоких порядков будут содержать погрешности. Поэтому приведем выражения для определения первых двух моментов (выражения для определения моментов более высоких порядков приведены [5]).

Первый начальный момент M_1 и второй центральный момент M_2 определяются из выражений [5]

$$M_1 = C_0 + 0,5[C_1 + 0,5C_2(\alpha + \beta)](\alpha + \beta) + \frac{C_2}{12}(\beta - \alpha)^2, \quad (10)$$

$$M_2 = \frac{(\beta - \alpha)^2}{4} \left[\frac{1}{3}[C_1 + C_2(\alpha + \beta)]^2 + \frac{C_2}{20}(\beta - \alpha)^2 \right]. \quad (11)$$

Общая дисперсия будет равна

$$\sigma^2 = M_2 + S^2, \quad (12)$$

где S^2 - дисперсия, обусловленная случайными отклонениями.

Из выражения (11) видно, что степень влияния непрерывной изменчивости на стандарт возрастает с увеличением мощности обобщаемой области, а также значений коэффициентов полинома C_1 и C_2 . К особенно быстрому возрастанию приводит увеличение значения коэффициента C_2 .

При наличии достаточного количества информации, позволяющего определить достоверные значения моментов третьего и четвертого порядков, и при принятии в качестве

аппроксимирующей функции изменения модуля деформации по глубине выражения (9), их значения можно определять по формулам: третий центральный момент

$$M_3 = \frac{c_2}{80} (\beta - \alpha)^4 \left\{ [c_1 + c_2(\alpha + \beta)]^2 + \frac{c_2}{28} (\beta - \alpha)^2 \right\} \quad (13)$$

четвертый центральный момент

$$M_4 = \frac{(\beta - \alpha)}{80} \left\{ [c_1 + c_2(\alpha + \beta)]^2 \left[[c_1 + c_2(\alpha + \beta)]^2 + \frac{3}{14} c_2^2 (\beta - \alpha)^2 \right] + \frac{c_2^4}{14} (\beta - \alpha) \right\} \quad (14)$$

Подставляя соответствующие значения моментов в выражение (8) можно восстановить закон распределения.

Сравнение средних значений и дисперсий модуля деформации по данным компрессионных испытаний, рассчитанных осреднением и по выражениям (10) и (12), можно производить при помощи критериев Стьюдента и Фишера [6, 7]. Если по обоим критериям различие статистически несущественно, то обработку данных можно производить обычным осреднением. В случае существенного различия необходимо, пользуясь соотношениями (10) и (11), рассчитать средние значения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новицкий П.В., Заграф И.А. "Оценка погрешностей результатов измерений", М., Энергоатомиздат, 1991, стр. 302.
2. Справочник проектировщика. Основания, фундаменты и подземные сооружения. М., 1985, стр. 478.
3. Шейнин В.И. "Обобщение вероятностного подхода к описанию механических свойств грунтового массива". // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 1965, №3, стр. 14-21.
4. Дивинский М.Л. "О статистической модели распределения величин показателей статистического зондирования. Совершенствование инженерных изысканий в мелиоративном проектировании", М., 1983, стр. 74-80.
5. Загиров Ш.Ш. "Оптимизация инженерно-геологических изысканий", М., Издательство ВЗПИ, 1990, стр. 346.
6. Ребрик Б.М., Чернышев С.Н. "Соотношение точности измерений с неоднородностью среды и требованиями расчетной схемы", Сб.: Математические методы в инженерной геологии. М., 1978, стр. 121-124.4.

7. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. «Курс теории вероятностей и математической статистики (для техн. приложений)». М., 1969, стр. 505.

УДК 621.314.59

ПЕРСПЕКТИВЫ ПРИМЕНЕНИЯ РАСПЛАВОВ ПОЛУПРОВОДНИКОВ СИСТЕМЫ $GeSe-A_2^V B_3^{VI}$ В КАЧЕСТВЕ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ТЕРМИСТОРОВ

**Д.Э. Арсланов
ДГТУ, Махачкала**

Аннотация: рассмотрена возможность использования жидких полупроводников для создания теплозависимых сопротивлений или термисторов. По результатам исследований сплавы $GeSe-Sb_2Se_3$ $GeSe-Bi_2Se_3$ рекомендованы в качестве высокочувствительных и высокотемпературных термисторов.

Ключевые слова: термистор, расплав полупроводников электропроводность, температурный коэффициент сопротивления.

Теплозависимые сопротивления или термисторы уже давно получили широкое распространение в различных областях техники – в автоматике и телемеханике, радиотехнике, электротехнике, электроприборостроении и др. Термосопротивления (ТС) являются приборами многоцелевого назначения [1]. С применением ТС можно надежно и просто организовать дистанционное и централизованное измерение температур, тепловой контроль машин и механизмов, температурную компенсацию элементов электрической цепи, измерение вакуума, измерение скоростей движения потоков жидкостей и газов.

Очевидно, что указанные примеры с достаточной степенью полноты отражают популярность приборов этого типа в современной технике. Однако следует заметить, что к настоящему времени наметился разрыв между требованиями, предъявляемыми областями новой техники к ТС, и возможностями приборов, выпускаемых промышленностью. В частности, современную технику и практику научного эксперимента уже не устраивает ограниченный

температурный диапазон применения современных приборов. Достаточно сказать, что максимальная температура применения термодатчиков ограничена 300°C. Это ограничение обусловлено, главным образом, нестабильностью термочувствительного материала при более высоких температурах. Поэтому исследования, направленные на поиск новых полупроводниковых материалов, обладающих высокой рабочей температурой и значительным температурным коэффициентом сопротивления (ТКС), является задачей сегодняшнего дня. Тем более, что промышленность использует пока весьма узкий круг веществ, ограничиваясь исключительно окисными системами. С учетом сказанного, весьма привлекательными объектами для использования в качестве рабочего тела ТС являются жидкие полупроводниковые системы. Заметим, что для жидких полупроводников характерна высокая стабильность параметров в условиях проникающего излучения, а также низкая чувствительность свойств к добавкам различного рода примесей. Всё это с учетом высокой температуры использования, а также при оптимальной величине ТКС делает жидкие полупроводники не только конкурентоспособными, но и в ряде случаев незаменимыми по сравнению с классическими активными веществами термодатчиков.

Укажем, что уже известны примеры использования жидких полупроводников в рассмотренных приборах. Так, авторы работы [2] предлагают использовать расплав сульфида таллия (Tl_2S) в качестве рабочего тела высокотемпературного термистора. Однако предложенный состав, к сожалению, не обладает достаточно высокими значениями ТКС (всего 1,5%/град.) и при повышении температуры склонен к диссоциации, что, естественно, отражается на стабильности характеристик приборов.

В связи с указанным мы проанализировали ранее полученные экспериментальные результаты по электропроводности исследованных расплавов [3] с точки зрения величины их ТКС и интервала температур возможного применения. Расчет ТКС

проводился в соответствии с выражением: $\alpha = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{(T_2 - T_1)\sigma_1} 100\%$, где σ_1

и σ_2 – значения проводимостей соответственно при температурах T_1 и T_2 .

Таблица 1

Состав	$T_1, ^\circ\text{K}$	$T_2, ^\circ\text{K}$	ΔT	σ_1 $\text{Om}^{-1}\text{cm}^{-1}$	σ_2 $\text{Om}^{-1}\text{cm}^{-1}$	α %/град
50 мол.% GeSe – 50 мол.% Sb_2Se_3	850	1078	223	50	735	6,14
40 мол.% GeSe – 60 мол.% Sb_2Se_3	900	1078	173	135	850	3,06
70 мол.% GeSe – 30 мол.% Sb_2Se_3	923	1073	150	200	950	2,50
60 мол.% GeSe – 40 мол.% Sb_2Se_3	873	1073	200	200	1200	2,50

Наибольшими значениями ТКС обладают сплавы составов 50 мол.% GeSe – 50 мол.% Sb_2Se_3 , 40 мол.% GeSe – 60 мол.% Sb_2Se_3 , а в системе $\text{GeSe} - \text{Bi}_2\text{Se}_3$ - сплавы составов 60 мол.% GeSe – 40 мол.% Bi_2Se_3 и 70 мол.% GeSe – 30 мол.% Bi_2Se_3 , что позволяет рекомендовать данные сплавы в качестве высокочувствительных и высокотемпературных термисторов.

Сплавы, рекомендуемые в качестве термочувствительного элемента датчика, отличаются от используемого термочувствительного элемента в работе [2] более широким температурным интервалом использования и большой термической стабильностью, а также значительно возросшими абсолютными величинами ТКС, что обеспечивает повышенную чувствительность приборов на их основе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арсланов Д.Э., Махмудов М.А. Исследование электрофизических свойств расплавов полупроводников системы $A^{IV}B^{VI} - A_2^VB_3^{VI}$ Материалы IV Всероссийской научно-технической конференции Состояние и перспективы развития термоэлектрического приборостроения Махачкала 2013г. 101-103с.
2. Глазов В.М., Айвазов А.А. и др. Авторское свидетельство ДСП №435462, 1976.
3. Арсланов Д.Э., Махмудов М.А. Расчет энергии активации расплавов в системе $\text{GeSe} - \text{Sb}_2\text{Se}_3$. Сборник тезисов докладов XXX итоговой научно-технической конференции преподавателей, сотрудников, аспирантов и студентов ДГТУ, часть 2, Гуманитарные науки. Махачкала 2009. 432-433с.

О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ В ОБЕСПЕЧЕНИИ КАЧЕСТВА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЯХ

Т.Г. Асадулаева
ДГТУ, Махачкала

Аннотация: в статье рассматриваются некоторые проблемы в развитии математического образования, проблемы управления повышением качества обучения математике в образовательных учреждениях с учетом требований регионального рынка труда и образовательных услуг. Предлагается один из подходов решения данных проблем в современных условиях рынка.

Ключевые слова: математическое образование, качество подготовки выпускников, качество обучения математике, контроль результатов обучения, рынок труда, рынок образовательных услуг.

Составной частью методов обучения в частной школе являются приемы учебной деятельности учителя и учащихся. Методические приемы - действия, способы работы, направленные на решение конкретной задачи. За приемами учебной работы скрыты приемы умственной деятельности (анализ и синтез, сравнение и обобщение, доказательство, абстрагирование, конкретизация, выявление существенного, формулирование выводов, понятий, приемы воображения и запоминания).

Методы обучения постоянно дополняются современными методами обучения, главным образом ориентированными на обучение не готовым знаниям, а деятельности по самостоятельному приобретению новых знаний, т.е. познавательной деятельностью.

Создание условий для зарождения интереса к математике и развития математических способностей одаренных школьников.

Цели обучения математике (в узком смысле) общеобразовательные, воспитательные, развивающие.

Общеобразовательные цели - овладение учащимися системой математических знаний и навыков, дающей представление о предмете математики, о математических приемах и методах познания, применяемых в математике.

Воспитательные цели - воспитание активности, самостоятельности, ответственности; воспитание нравственности, культуры общения; воспитание эстетической культуры, воспитание графической культуры школьников.

Развивающие цели - формирование мировоззрения учащихся, логической и эвристической составляющих мышления, алгоритмического мышления; развитие пространственного воображения.

Цели обучения могут формулироваться по-разному в зависимости от их ориентации. Например, можно определить цель обучения через деятельность учителя; через учебную деятельность учащихся.

Достижение целей обучения математике определяется функциями обучения математике.

Факторы, порождающие формализм знаний в процессе обучения математике в частных школах и, как следствие, недостаточную подготовленность к профессиональной деятельности учителя, можно подразделить на объективные и субъективные. Объективные факторы (не зависящие от воли и умений преподавателей и студентов) - это сложности оперирования знаково-символическими средствами; высокий уровень абстрагирования при работе с математическими объектами; недостаточная разработанность психолого-педагогических теорий (технологий) обучения математике, а также сложность в выявлении закономерностей психофизиологических и психофизических процессов восприятия, памяти, мышления; слабая эффективность профориентационной работы по привлечению в педвузы одаренных и интеллектуально развитых абитуриентов (в основном по социально-политическим и экономическим причинам); субъективные факторы (зависящие от воли и умений преподавателей и студентов) - это чрезмерная интенсивность и недостаточная эффективность структурирования информационного потока знаний; недостаточная развитость функциональных и операционных механизмов восприятия и переработки математической информации обучаемым; слабая мотивация и прикладная направленность воспринимаемых знаний; недостатки организационно-методического обеспечения учебной деятельности; недостаточное внимание педагогов к вопросу организации рефлексии обучаемых и формированию творческой активности в процессе обучения математике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тони Блер. Новая экономика требует новой системы образования// Высшее образование в России. - 2000. - №2.
2. Заболотный Е.Б., Майсаков Д.Л. Некоторые аспекты распределения внебюджетных средств в учреждениях высшего профессионального образования// Университетское управление. – 2001. - № 2(17).
3. Дахин А. Российское образование: модернизация или развитие? // Народное образование. – 2003. - №2.

УДК 378.016:51

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ

**И.К. Асмыкович, О.Н. Пыжкова
БГТУ, Минск, Беларусь**

Аннотация: статья посвящена обсуждению важности самостоятельной работы студентов при обучении математическим дисциплинам в технических университетах. Отмечены плюсы и минусы в организации и использовании дистанционного обучения, обращено особое внимание на не совсем логичные преобразования учебных программ. Показана необходимость использования информационных ресурсов по новым современным направлениям прикладной математики, описано использование электронных учебно-методических комплексов.

Ключевые слова: математика, самостоятельная работа, дистанционное обучение, электронные учебно- методические комплексы.

Проблема самостоятельной работы студентов была и есть достаточно актуальной во все времена [1, 2]. Особенно это важно при изучении фундаментальных дисциплин, в частности, высшей математики, по которой, к сожалению, продолжается сокращение учебного времени на лекционные и практические занятия, а лабораторные работы вообще убираются. Следует отметить, что

традиционная система семинарских занятий не очень способствует осмысленной работе по усвоению основных методов математических дисциплин и остается, как и ранее, надеяться на активизацию самостоятельной работы [2]. Ведь небольшой секрет, что когда студент, часто с активной помощью преподавателя решает у доски задачу остальные студенты группы либо переписывают решение с доски, не вдумываясь в смысл и содержание переписанного, а то, и откровенно дремлют, либо рассматривают сайты на мобильном телефоне, явно несвязанные с математикой. Конечно, можно привлекать «помощь зала», организуя коллективную работу, но в этом тоже участвуют лишь отдельные студенты.

Естественно, что в XXI веке в условиях «цифрового» общества требуются существенные изменения организация образовательного процесса по математическим дисциплинам [3], модификация курса для большинства современных инженерных специальностей и введение новых разделов для ряда из них [4, 5]. Необходима замена пассивного слушания лекций, или просматривания соответствующих текстов на экране компьютера, возрастанием доли самостоятельной работы студентов над предложенными темами, или как модно сейчас говорить: переход от трансляции знаний учащимся к получению знаний ими из различных источников, что может происходить в процессе самостоятельной работы обучаемых. В действительности большинство студентов не может работать самостоятельно, многие из них не видят необходимости в приобретении фундаментальных знаний, полагая, что смогут найти все нужные сведения в любой момент в интернете, не задумываясь о их правильности. И вместо диалога на лекции, предполагающего обсуждение и осмысление, происходит монолог лектора. Усугубляет проблему и то, что математическая подготовка студентов технических специальностей осуществляется, в основном, на первом и втором курсах. К сожалению, следует констатировать тот факт, что многие студенты не обладают должным уровнем базового образования достаточным для качественного овладения учебного материала.

Ясно, что фундаментальные науки и, в частности, математика в этом подходе должна быть не на последних ролях. Математика призвана стать существенным сегментом инструментальной базы технологической революции и, кроме того, активно участвовать в формировании интеллектуального потенциала самих субъектов современности. В современную информационно насыщенную эпоху

резко возросла потребность в креативной, интеллектуально развитой личности. Разумеется, что наряду с другими компетенциями она должна обладать и отвечающими требованиям нашей эпохи компетенциями в области математики: даже в повседневности сегодня практически трудно без них обойтись, хотя в реальности и обходятся. Математика — это не только универсальный язык для описания и изучения инженерных объектов и процессов, но и фактор, формирующий стиль мышления специалистов. Математика ставит проблемы, решение которых требует усилий мысли, упорства, воли и других качеств личности.

К сожалению, реальные преобразования типовых и учебных программ среднего и высшего специального образования в Республике Беларусь не очень соответствуют идеям фундаментальности образования [3, 5]. По всем инженерным специальностям продолжают существенно уменьшать объемы часов по математическим дисциплинам. Отметим, что целый ряд весьма необходимых для высшего образования инженеров разделов математики отсутствуют в современных учебных программах. Из учебных планов ряда инженерных специальностей исключены математические курсы такие как: «Методы оптимизации», «Системный анализ», «Математическое программирование».

Стараясь облегчить жизнь студенту, за последние годы преподаватели кафедры высшей математики БГТУ разработали и активно используют «Электронные учебно-методические комплексы» (ЭУМК) в системе дистанционного обучения (СДО). Наряду с учебно-методической литературой, ЭУМК служат методическим обеспечением самостоятельной работы студентов. ЭУМК обеспечивают студентов как теоретическим материалом (текстами лекций, справочной информацией, ссылками на дополнительную литературу по каждой теме курса), так и набором заданий для проведения практических занятий и самостоятельного решения. Задачи для решения в аудитории подобраны таким образом, чтобы студенты могли освоить основные понятия курса. Для стимуляции интереса обучающихся включены рисунки, фотографии и др. По результатам наблюдений, студенты наиболее часто обращаются к учебным материалам (текстам лекций, теоретическим и практическим минимумам, разобраным примерам), а преподаватели активно используют тестирование как форму контроля приобретенных

студентами знаний. ЭУМК уже созданы для студентов большинства специальностей университета.

Использование информационных ресурсов в процессе обучения может способствовать формированию интереса студентов к предмету, так как современная молодежь хорошо ориентируется в программных средствах и неплохо обращается с техникой [6,7,8]. Использование презентационных материалов, электронных учебников, специализированных пакетов прикладных программ, интернет-технологий способствует созданию развивающей информационной образовательной среды. Каждый преподаватель также выкладывал для студентов своего потока в открытый доступ через интернет необходимый для изучения лекционный материал и практические задания. Это облегчало студенту работу, ведь сам он вряд ли бы искал и нашел нужные ему темы. Основными средствами в преподавании высшей математики с применением информационно-коммуникационных технологий являлись учебные материалы, дидактические материалы, тесты и т.п. Обмен вопросами и ответами, обсуждения происходили либо с использованием микрофонов, либо через чат. Такое общение способствовало более эффективному проведению занятий. Следует подчеркнуть, что дистанционная форма обучения отличается прежде всего особыми, достаточно специфическими факторами реализации [6]. Это и разделение преподавателя и студентов расстоянием, и постоянный обмен сообщениями в чатах и мессенджерах, и преобладание самоконтроля над контролем со стороны преподавателя и т.п.

На старших курсах наиболее полезным является использование математических моделей реальных задач специальности студента [6, 7]. При этом хорошо понимающим математику студентам можно доверить на семинарском занятии формулировать математическую модель конкретной задачи, которая соответствует теме занятия, и предлагать алгоритм ее решения. Далее с помощью преподавателя следует проанализировать полученный ответ и отметить математические методы, использованные при решении задачи. Такие студенты могут заниматься научно-исследовательской работой по применению методов прикладной математики в задачах своей специальности, публиковать результаты [7, 8] и участвовать в различных конкурсах. Это является высшей формой самостоятельной работы студентов по математическим дисциплинам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пыжкова О.Н., Борковская И.М., Пономарева С.В. Развитие навыков самостоятельной работы как важнейший элемент подготовки будущих инженеров (на примере преподавания высшей математики) // Инженерное образование и его пропедевтика в эпоху цифровизации общества – Формирование престижа профессии инженера у современных школьников // Сб. статей X Всероссийская очно-заочной науч.-практ. конф. с межд. участием в рамках Петербургского международного образовательного форума (24.03.2022 – Санкт-Петербург)/Под ред. Козловой А.Г., Крайновой Л.В., Расковалова В.Л., Денисовой В.Г. – Санкт-Петербург: ЧУ ДПО «Академия Востоковедения», 2022. –С. 240 -244.

2. Асмыкович И.К. Активизация самостоятельной работы студентов технических университетов по математике / Инновации в системе высшего образования [Текст]: материалы IV Всерос. науч.-метод. конф. / НОУ ВПО «Челяб. ин-т экономики и права им. М.В. Ладощина»; [отв. ред.: А.В. Федоров; редкол: С. Б. Синецкий, Г.И. Ладощина, А.Е. Сомов]. — Челябинск, 2013. —с. 83-85.

3. Адуло Т. И., Асмыкович И.К. О проблемах математического обеспечения социального проекта «цифровое общество» // Образование в современном мире: сборник научных статей / под редакцией Ю. Г. Голуба. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2021. – Вып. 16. – С. 45 - 49.

4. Пыжкова О.Н., Борковская И.М. К вопросу об эффективности преподавания математических дисциплин в современных условиях // Сборник трудов межд. научной конф. «Мухтаровские чтения: актуальные проблемы математики, методики ее преподавания и смежные вопросы», посвященной 50-летию ДГТУ. Махачкала: ДГТУ, 2022 г. с.115 – 119.

5. Асмыкович И.К., Пыжкова О.Н. О модификации курса и методики преподавания математики для современных инженерных специальностей // Технологическая независимость и конкурентоспособность Союзного Государства, стран СНГ, ЕАЭС и ШОС: сб. ст. VI Междунар. науч.-техн. конф. «Минские научные чтения-2023» в 3 т. Минск, 06–08 декабря 2023 г. [Электронный ресурс]. – Минск: БГТУ, 2023. – Т. 1. –с.34 - 39

6. Игнатенко В. В. Дистанционное обучение как один из элементов самостоятельной работы студентов // Актуальные вопросы профессионального образования Материалы III междунар. науч.-

практ. конф. (Республика Беларусь, г. Минск, 1–2 октября 2020 г.)
Научное электронное издание Минск БГУИР 2020 С.110 –113.

7. Курмашев Д.Д., Асмыкович И.К. Анализ и обработка данных для построения графиков // Роль математики в становлении специалиста-2020. Материалы Межд. научно-практ. конф. Уфимский государственный нефтяной технический университет. 2020. С.49-53.

8. Марчук К.С., Асмыкович И.К. Алгоритм создания электронной подписи на основе групп точек на эллиптической кривой // Молодежь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований: материалы II Всерос. нац. науч. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Комсомольск-на-Амуре, 08-12 апреля 2019 г.: в 4 ч. / редкол.: Э. А. Дмитриев (отв. ред.) [и др.]. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КНАГУ», 2019. – Ч. 2. – с. 354 - 356.

УДК 620.121

К ВОПРОСУ О ЗАЩИТЕ ГЕОТЕРМАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОТ СОЛЕОТЛОЖЕНИЯ ПРИ УТИЛИЗАЦИИ МЕТАНА

Г.Я. Ахмедов, А.С. Курбанисмаилова
ДГТУ, Махачкала

Аннотация: представлены результаты исследования взаимосвязи общего давления в системе с давлениями отдельных газов в растворе геотермальных вод. Установлено, что с уменьшением общего давления в системе концентрация метана в процентном отношении растет по сравнению с концентрацией углекислого газа. Это позволяет рассчитать значение общего давления для работы геотермальных энергетических систем в режиме без солеотложения.

Ключевые слова: геотермальная вода, солеотложение, попутный газ, метан.

Утилизация метана CH_4 из геотермальных вод связана наряду с другими проблемами также и с сохранением в воде равновесной концентрации CO_2 , при которой еще не будет отложение твердой фазы CaCO_3 в теплообменниках. Для оценки такой постановки вопроса проведены экспериментальные исследования

непосредственно на скважинах месторождений геотермальных вод Кизляр и Махачкала-Тернаир. Отбор проб газовой фазы геотермальных вод проводился по разработанной методике с учетом стандартов (ГОСТ 18917-82. Газ горючий природный. Методы отбора проб). На рис.1. представлены фотографии устройства, позволяющего отбирать пробы газа под давлением до 1 МПа.



Рис.1. Экспериментальное оборудование для оценки возможности утилизации метана

На основе данных анализа концентраций компонентов свободной газовой фазы, отобранной из скважин с термальной водой, полученных методом газовой хроматографии на газовом хроматографе «Кристалл 5000.2» в Геологическом институте РАН (г. Москва), построены графики процентных соотношений концентраций He, Ar, CO, CO₂, CH₄, N₂, O₂ (см. рис.2)

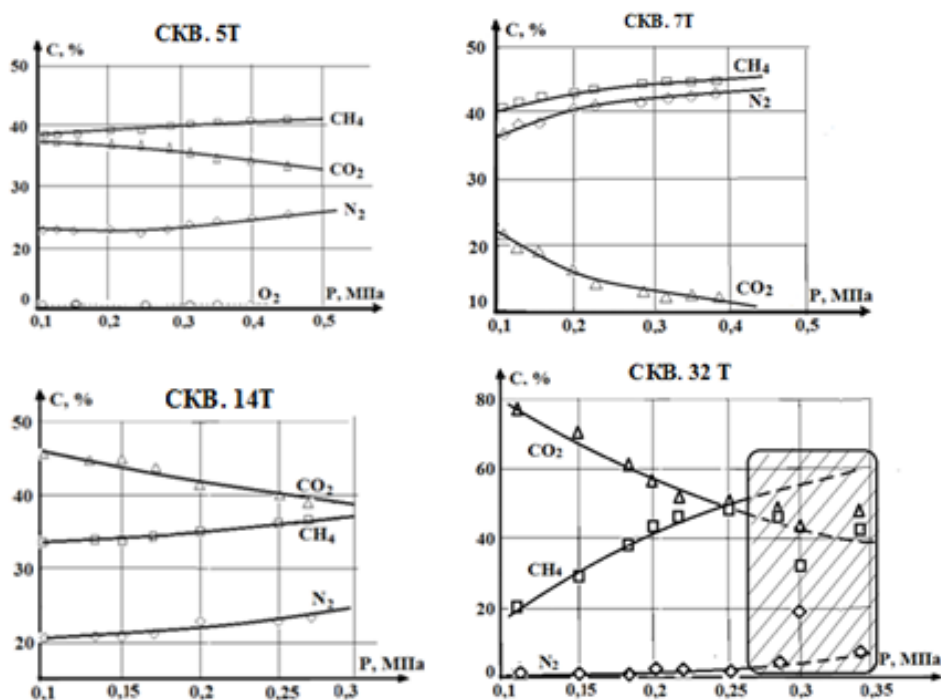


Рис.2. Зависимости процентного соотношения концентраций CH₄ и CO₂ при разных давлениях

В связи с меньшей растворимостью в воде CH_4 по сравнению с CO_2 и имеющимися экспериментальными данными по процентному соотношению парциальных давлений CH_4 и CO_2 имеется возможность рассчитать величину общего давления в теплообменном оборудовании, при котором будет отсутствовать отложение солей в теплообменном оборудовании:

$$P = P_{\text{CO}_2} + P_{\text{CH}_4} + P_{\text{N}_2} + P_{\text{H}_2\text{O}} \quad (1)$$

Проведенные исследования и оценка схем эксплуатации энергетического оборудования при утилизации попутных горючих газов показывают на необходимость учета взаимосвязи общего давления P в системе с парциальными давлениями отдельных газов.

С учетом (1), уравнения состояния газов (уравнение Клапейрона-Менделеева), закона Генри для малых давлений (0,1– 0,5 МПа) получено выражение для определения газосодержания отдельного газа GC_i (моль/л) в общей смеси газов в растворе воды и газовой среде в виде

$$GC_i = G\Phi\alpha_i / 22,4 + K_i \cdot \alpha_i (P - P_{\text{H}_2\text{O}}) \quad (2)$$

а также парциального давления газа

$$P_i = \frac{\frac{V_i}{V} \cdot RT}{K_i \cdot RT + 1} \quad (3)$$

где K_i - константа Генри, моль/(л·Па); P - общее давление газа, Па; α_i - мольная доля i – того компонента газа; $G\Phi$ - газовый фактор, $\text{м}^3/\text{м}^3$; R –универсальная газовая постоянная, Дж/(моль·К); V_i - количество молей i – того компонента газа, T – температура газа, °К.

Решение этих уравнений дает возможность определить зависимость парциальных давлений компонентов газовой смеси от общего давления. Для предотвращения отложений CaCO_3 в теплообменниках разработана методика закачки продуктов горения попутного метана в воду перед входом в теплообменник. Установлено, что его необходимо вводить в количестве на порядок выше равновесного значения [1]. При этом время растворения определяется согласно формуле (4)

$$\tau_2 = \frac{V}{S^* \cdot \beta} \ln \frac{C_{P2}^* - C_o^*}{(C_{P2}^* - C_{P1}^*)} \quad (4)$$

С использованием полученных результатов и установлением соотношения (связь парциального давления метана и равновесного значения давления углекислого газа в растворе геотермальной воды)

$$pCH_4 = f(pCO_2)$$

можно утилизировать при дебите скважины 2500 м³/сут около 1000 м³ метана за сутки.

На основе анализа проведенных исследований разработана схема эффективного использования как тепловой энергии геотермальной воды, так и энергии сгорания попутного метана [2]. Контроль за солеотложением в теплообменном оборудовании производился согласно разработанной методике учета сопротивления раствора воды и материала отложений [3]. Исследования показали, что более эффективными в этом плане способом безнакипного режима эксплуатации являются внутрискважинные теплообменники [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахмедов Г.Я., Курбанисмаилова А.С. Разработка методики эксплуатации геотермальных систем при извлечении попутных газов// Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2018. Т. 45. № 3. С. 28-38.

2. Ахмедов Г.Я., Магомадова Р.А. Об отложении карбоната кальция на охлаждаемой поверхности геотермального оборудования //Альтернативная энергетика и экология.- 2013.- № 01/2.- С. 98 -102.

3. Пат. 2344338 РФ, МПК F17D 1/16, G01B 17/02. Способ определения толщины отложений на внутренней поверхности трубопроводов /Ахмедов Г.Я. Опубл. 20.01.2009. Бюл. № 2. - 5 с.

4. Ахмедов Г.Я. К вопросу об использовании внутрискважинных теплообменников в геотермальной энергетике //Промышленная энергетика. - 2011. - № 9. - С. 13-17.

УДК 620.121

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДИКИ КОМПЛЕКСНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭНЕРГИИ ИСТОЧНИКОВ НИЗКОПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ГЕОТЕРМАЛЬНЫХ ВОД

**Г.Я. Ахмедов, Л.М. Ахмедова
ДГТУ, Махачкала**

Аннотация: в статье рассматривается вопрос использования теплообменного оборудования в системе теплоснабжения и горячего водоснабжения на базе источников геотермальных вод. Предложена

методика периодического растворения в теплообменнике отложений карбоната кальция небольшой толщины в случае нарушения карбонатно-кальциевого равновесия в растворе геотермальной воды.

Ключевые слова: геотермальная вода, карбонат кальция, углекислотное равновесие, метан, энергетическое оборудование, солеотложение.

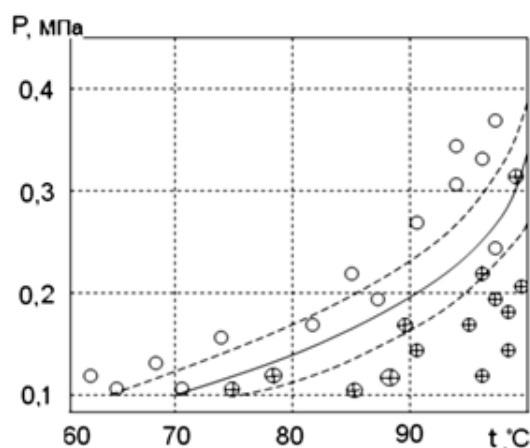


Рис. 1.

Россия обладает большими запасами геотермальных вод с содержанием в них сопутствующего природного газа метана. К примеру, на Северном Кавказе содержание метана в растворе геотермальных вод доходит до 60-80% в общей смеси газов [1,2]. Однако при извлечении геотермальной воды из скважины давление в растворе воды падает до значений близких к атмосферному, что, в большинстве случаев, приводит к нарушению карбонатно-

кальциевого равновесия и образованию карбонатных отложений в теплообменниках [3,4]. В связи с этим возникает необходимость в максимальном извлечении метана из геотермальных вод с сохранением в них равновесной концентрации углекислого газа, при которой еще не будут образовываться твердые отложения. На рис. 1 представлен график равновесных значений давления и температуры раствора воды на примере скважины 27Т (Махачкала-Тернаир, РД). Эксплуатация теплообменника ниже равновесной линии приводит к отложениям карбоната кальция на его внутренней поверхности. На практике с целью исключения солеотложения на теплообменной поверхности эксплуатация теплообменников проводится при параметрах давления выше равновесного значения, что снижает эффективность использования теплообменников за счет снижения дебита скважины и коррозии его внутренней поверхности.

В литературе предлагаются различные схемы утилизации энергии источников геотермальных вод. Однако не был решен вопрос защиты теплообменников от солеотложения в случае нарушения карбонатно-кальциевого равновесия в геотермальной воде, протекающей через теплообменник.

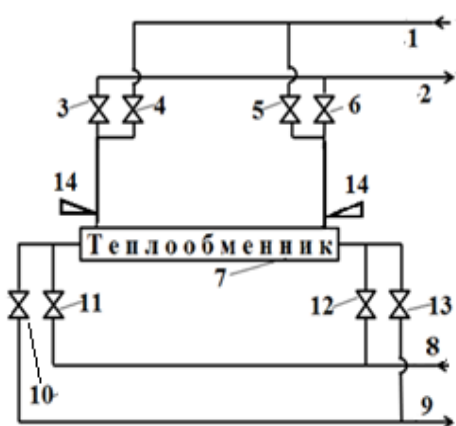


Рис. 2

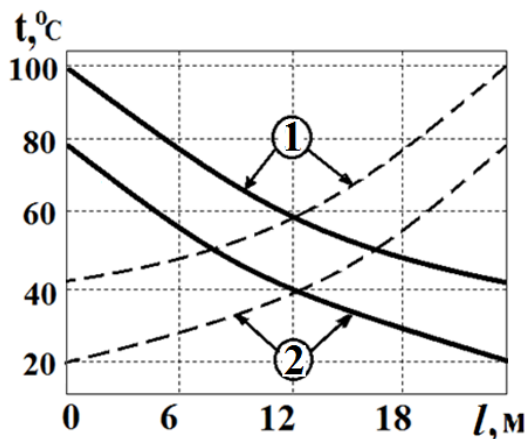


Рис. 3

Основываясь на проведенных исследованиях, а также на учете особенностей использования геотермальных вод на практике разработана методика эксплуатации теплообменника в условиях нарушения карбонатно-кальциевого равновесия в геотермальной воде. На рис. 2 представлена схема подключения теплообменника к источнику геотермальной энергии через запорную арматуру. Контроль за солеотложением производится на основе разработанного способа [5].

При закрытых задвижках 3 и 5 и открытых 4 и 6 по линии 1 геотермальная вода подается в первичный контур теплообменника и выводится по линии 2.

Одновременно, при закрытых задвижках 11 и 13 и открытых 10 и 12 по линии 8 во вторичный контур противотоком подается подогреваемая вода и выводится по линии 9. На практике отложение солей карбоната кальция, в основном, наблюдается в начале теплообменной поверхности первичного контура в связи с высокой температурой геотермальной воды (см. рис. 1 и 3), при которой вода склонна к выделению из раствора твердой фазы карбоната кальция. По мере движения по тракту теплообменника раствор геотермальной воды переходит в состояние равновесия и в конце теплообменной поверхности переходит в состояние максимальной агрессии, т.е. в состояние, при котором происходит растворение ранее образовавшихся отложений, если таковые имеются. Наличие отложений в начале теплообменной поверхности первичного контура фиксируется датчиком солеотложения 14. При наличии отложений толщиной более 1 – 2 мм производится смена направления движения геотермальной и холодной подогреваемой воды в соответствующих контурах теплообменника. Для этого закрываются задвижки 4 и 6 и открываются 3 и 5. При этом по линии 1 геотермальная вода подается

в первичный контур теплообменника и выводится по линии 2 в обратном направлении. Одновременно, задвижки 10 и 12 закрываются, а 11 и 13 открываются. При этом подогреваемая вода во вторичном контуре по линии 8 подается противотоком и выводится по линии 9 также в обратном направлении (противоположном первоначальному направлению). На рис. 3 показано изменение распределения температур в контурах по тракту теплообменника. Сплошные линии – линии температуры геотермальной (1) и подогреваемой (2) воды, соответственно, в первичном и вторичном контуре по длине теплообменника. Пунктирные линии – линии температуры воды в первичном (1) и вторичном (2) контурах теплообменника после смены режима работы теплообменника.

Как видно из рис.1 и 3, смена режимов эксплуатации теплообменника способствует растворению ранее образовавшихся отложений в первичном контуре, что сохраняет работу теплообменника в состоянии без ремонта. Наиболее эффективными в этом плане представляются внутрискважинные теплообменники [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бранчугов В.К., Гаврилов Е.И., Гарипов В.З., Козловский Е.А., Краев А.Г., Литвиненко В.С. и др. Минерально-сырьевая база топливно-энергетического комплекса России. Состояние и прогноз. - М.: Институт геолого-экономических проблем, 2004. - 548 с.

2. Акулинчев Б.П., Панченко А.С., Пугачева М.Ф. Водорастворенные газы Предкавказья и проблемы их использования в народном хозяйстве //Ресурсы нетрадиционного газового сырья и проблемы его освоения. Ленинград, 1990 г. С. 138-144.

3. Ахмедов Г.Я. Твердые отложения карбоната кальция в геотермальных системах//Альтернативная энергетика и экология.- 2010.- № 11.- С. 81- 86.

4. Ахмедов Г.Я., Магомадова Р.А. Об отложении карбоната кальция на охлаждаемой поверхности геотермального оборудования //Альтернативная энергетика и экология.- 2013.- № 01/2.- С. 98 -102.

5. Пат. 2344338 РФ, МПК F17Д 1/16, G01В 17/02. Способ определения толщины отложений на внутренней поверхности трубопроводов /Ахмедов Г.Я. Опубл. 20.01.2009. Бюл. № 2. - 5 с.

6. Ахмедов Г.Я. К вопросу об использовании внутрискважинных теплообменников в геотермальной энергетике//Промышленная энергетика. - 2011. - № 9. - С. 13-17.

УДК 004.9

РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

М.Г. Ахмедов
ДГТУ, Махачкала

Аннотация: целью данного исследования было выявление разницы в скорости выполнения решения программой системы линейных уравнений параллельным и последовательным методами. А также целесообразности использования метода распараллеливания решения системы линейных уравнений с двумя неизвестными. Была написана программа для решения системы линейных уравнений параллельным и последовательным методами. Для написания программного кода, использовался язык программирования Python и библиотеки Python. Исходя из полученных результатов выполнения программного кода, были сделаны выводы, что для решения системы линейных уравнений с двумя неизвестными, лучше использовать последовательный метод, т.к. он выполняет нахождение неизвестных быстрее при небольших объемах данных.

Ключевые слова: распараллеливание, система линейных уравнений, программа, вычисления, язык программирования, Python.

Введение.

В настоящее время большинство выпускаемых микропроцессоров являются многоядерными. Это касается не только настольных компьютеров, но и в том числе мобильных телефонов и планшетов (исключением пока являются только встраиваемые вычислительные системы). Для полной реализации потенциала многоядерной системы программисту необходимо использовать специальные методы параллельного программирования, которые становятся все более востребованными в промышленном программировании. Производительность суперкомпьютеров интенсивно растет. За последние десять лет, с 2010 по 2020 год, пиковая производительность самого мощного суперкомпьютера в рейтинге Top 500 увеличилась в 220 раз [1].

Основные подходы к распараллеливанию.

Разработчики используют большое количество методов параллельных вычислений. Все эти методы используют два основных базовых подхода к распараллеливанию:

- **Распараллеливание по данным.** Программист обнаруживает в своей программе массив данных, который последовательно обрабатывается в функции `func`. Затем он стремится разделить этот массив на блоки данных, которые могут быть независимо обработаны внутри `func`. В результате он запускает несколько потоков одновременно, каждый из которых исполняет `func`, обрабатывая различные блоки данных внутри этой функции.

- **Распараллеливание по инструкциям.** Программист обнаруживает в программе последовательность функций, которые могут быть вызваны независимо друг от друга (они не изменяют общие глобальные переменные, и результаты одной функции не используются в другой). Затем он запускает эти функции в параллельных потоках.

Однако некоторые задачи могут быть одинаково хорошо распараллеливаемыми как с помощью первого, так и второго метода. В этом случае выбор зависит от того, какой из методов равномернее распределяет нагрузку между потоками. Идеально, если все потоки завершают свою работу примерно одновременно, чтобы эффективно использовать доступные ядра процессора и избежать простоя завершивших работу потоков в ожидании других [2].

Постановка задачи.

В математике система линейных уравнений (или линейная система) – это набор двух или более линейных уравнений, включающих один и тот же набор переменных.

Конечная цель решения системы линейных уравнений – найти значения неизвестных переменных.

В данной работе за объект исследования нами была взята система линейных уравнений с двумя неизвестными переменными x и y :

$$\begin{cases} 4x + 3y = 20 \\ -5x + 9y = 26 \end{cases}$$

Задача состоит в решении данной системы линейных уравнений последовательным и параллельным способами и сравнения скорости выполнения операций.

Для решения задачи была написана программа на языке программирования Python с использованием библиотек для математических расчетов, параллельных вычислений и времени выполнения операций последовательных и параллельных вычислений.

По результатам выполнения программы, будет дана оценка целесообразности распараллеливания решения системы линейных уравнений с двумя неизвестными.

Параллельные вычисления.

В матричном способе решаемая система линейных уравнений представлена в виде матрицы $AX = B$.

Чтобы найти значение переменных x и y в нашей системе уравнений, нужно найти значения в матрице X . Для этого мы можем взять скалярное произведение обратной матрицы A и матрицы B .

Для решения системы линейных уравнений нам необходимо выполнить две операции: обращение и скалярное произведение матрицы. Библиотека Numpy[3] от Python поддерживает обе операции.

Для параллельного решения системы линейных уравнений будем использовать библиотеку multiprocessing [4] от Python. Для фиксации времени проведения расчетов последовательным и параллельным методами используем библиотеку time [5-6] от Python.

Программа для решения системы линейных уравнений.

```
import numpy as np
import time
import multiprocessing
def solve_linear_equations_sequential():
    A = np.array([[4, 3], [-5, 9]])
    B = np.array([20, 26])
    X = np.linalg.solve(A, B)
    print("Последовательное решение:", X)
def solve_linear_equations_parallel():
    A = np.array([[4, 3], [-5, 9]])
    B = np.array([20, 26])
    pool = multiprocessing.Pool()
    X = pool.apply(np.linalg.solve, args=(A, B))
    pool.close()
    pool.join()
    print("Параллельное решение:", X)
```

```
start_time = time.time()
solve_linear_equations_sequential()
sequential_time = time.time() - start_time
start_time = time.time()
solve_linear_equations_parallel()
parallel_time = time.time() - start_time
print("Последовательное решение:", sequential_time)
print("Параллельное решение:", parallel_time)
```

Заключение.

Были получены следующие результаты программных вычислений:

- 1) Последовательное решение: $x = 2$, $y = 4$; время выполнения – 0.0007 секунды
- 2) Параллельное решение: $x = 2$, $y = 4$; время выполнения – 0.2 секунды

Сравнивая полученные данные, видим, что значения найденных неизвестных линейного уравнения одинаковы в обоих случаях.

Наблюдается значительная разница во времени выполнения вычислений. Время выполнения расчетов последовательным способом приблизительно в 1000 раз меньше, чем время выполнения параллельным методом.

Исходя из результатов проведенной работы, приходим к выводам:

1) При решении системы линейных уравнений с двумя неизвестными, для сокращения времени программных вычислений, лучше использовать последовательный метод, он выполняет нахождение корней быстрее при небольших объемах данных.

2) Параллельный метод вычислений будет более эффективен при решении систем линейных уравнений с большим количеством уравнений и неизвестных.

Благодаря многопоточности задачи можно делить на несколько подзадач и каждую из них решать независимо друг от друга, при этом максимально эффективно используя время процессора. Несмотря на это, многопоточность не всегда является правильным выбором и иногда может замедлить работу приложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.В. Горобец. Параллельные методы решения задач // Учебный курс для студентов магистратуры факультета

Вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

2. В.В. Соснин, П.В. Балакшин. Введение в параллельные вычисления// Санкт-Петербург 2015. Университет ИТМО. Учебное пособие.

3. Нескучный туториал по NumPy [Электронный ресурс]// Хабр (habr.com)//URL: <https://habr.com/ru/articles/469355/>.

4. multiprocessing — Process-based parallelism — Python 3.8.17 documentation (turbopages.org) [Электронный ресурс]// URL: https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.11c5a83f-65837618-ab8232b6-4722d776562/https/docs.python.org/3.8/library/multiprocessing.html

5. Модуль времени (time) в Python - 9 методов с примерами (pythononline.ru)[Электронный ресурс] //URL:<https://pythononline.ru/osnovy/time-python?ysclid=lqeest7lg8453753070>.

6. Главные методы модуля time в python 3, шаблоны и примеры ~PythonRu[Электронный ресурс]// L:<https://pythonru.com/osnovy/modul-time-v-python?ysclid=lqeeq1s48b271550854>.

УДК 517.946

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

М.М. Гаджиев
ДГТУ, Махачкала

Аннотация: рассмотрена смешанная задача в классической и «Видоизмененной» постановках и указаны условия, при которых указанные задачи имеют единственное решение в пространстве Соболева $W_2^2(Q_T)$.

Ключевые слова: классическая и «Видоизмененная» постановка смешанной задачи, априорные оценки решения задачи, корректность задачи.

Интерес к исследованию краевых задач для систем гиперболо-параболических уравнений связан с тем, что такие системы

встречаются в задачах, описывающих совместное распространение тепловых и звуковых колебаний, фильтрации грунтовых вод в капиллярно-пористых средах и других задачах механики и физики. Известно, что краевые задачи, корректно поставленные для невырождающихся уравнений становятся, вообще говоря, некорректными для вырождающихся уравнений и систем, и на постановку задач существенно влияют как коэффициенты при младших членах уравнений, так и правые части.

В цилиндрической области $Q_T = \Omega \times [0, T]$, Ω – область из R^n с границей σ ; $S_T = \sigma \times [0, T]$.

Рассмотрим нелинейную систему уравнений

$$L_i(u^i) = K_i(x, t)u_{tt}^i + M_i(u^i) + |u_t^i|^{\rho_i} u_t^i = f_i(x, t, u, u_t^i, \nabla u) \quad (1)$$

$$K_i(x, t) \geq 0, u = (u^1, u^2, u^3, \dots, u^n), x = (x^1, x^2, \dots, x^n), (x, t) \in Q_T,$$

$M_i(u^i)$ – равномерно-эллиптические операторы второго порядка.

$$M_i(u^i) = - \sum_{r,s=1}^n \frac{\partial}{\partial x^r} (a_{rs}^i(x) u_{x^s}^i) \quad (2)$$

$$\rho_i > 0, a_{rs}^i = a_{sr}^i, \mu |\varepsilon|^2 \leq a_{rs}^i \varphi_r \varphi_s \leq \nu |\varepsilon|^2, i = \overline{1, n}.$$

При $t = 0$ введем множества

$$\sum_{+}^i \{(x, 0) \in \Omega, K_i(x, 0) > 0\}, \sum = \sum_{+}^{\overline{i}} \quad (3)$$

Предположим, что функции $f_i(x, t, u, u_t^i, \nabla u)$ имеют ограниченные частные производные по всем своим переменным и удовлетворяют также следующим условиям:

$$f_{it}(x, t, u, u_t^i, \nabla u) \in L(Q_T),$$

для всех $u^i \in W_2^2(Q_T)$,

$$f_i(x, 0, \dots, 0) = 0. \quad (4)$$

Для системы уравнений (1) рассмотрим смешанную задачу в классической и «Видоизмененной» постановке [1].

Классическая смешанная задача:

Найти в области Q_T функции $u^t(x, t)$ являющиеся решением системы уравнений (1) и удовлетворяющие условиям

$$u^t(x, 0) = 0, u_t^i(x, t) = 0, u^i(x, t)|_{S_T} = 0. \quad (5)$$

«Видоизмененная» смешанная задача:

Найти в области Q_T функции $u^t(x, t)$ являющиеся решением системы уравнений (1) и удовлетворяющие условиям

$$u^i(x, 0) = u_t^i(x, 0)|_{\Sigma^i} = u^i(x, t)|_{S_T} = 0. \quad (6)$$

Обозначим через $K_L(Q_T)$ и $S_L(Q_T)$ классы функций из пространства Соболева $W_2^2(Q_T)$, удовлетворяющие соответственно начальным и краевым условиям (5) и (6).

Рассмотрим сначала в области Q_T линейную систему уравнений

$$\mathcal{L}_i(u^i) = \mathcal{L}_i(u^i) + a_i(x, t) + \sum_{j=1}^n c_j^i(x, t)u^j = f_i(x, t) \quad (7)$$

и покажем, что разрешимы смешанные задачи (7), (5) и (7), (6).

Лемма 1. Если существует константа $\lambda_0 \geq 0$ такая, что

$$\mathcal{L}\left(a_i(x, t) - \frac{\lambda_0}{2}K_i(x, t)\right) - K_{it}(x, t) \geq \delta > 0, \quad (8)$$

то найдется константа $\lambda_1 \geq \lambda_0$ такая, что для всех констант $\lambda \geq \lambda_1$ и для всех функций $u^i(x, t)$ из класса $S_L(Q_T)$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^n \|u^i\|_1^2 \leq c \int_{Q_T} \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_i(u^i)u_t^i \exp(-\lambda t) dx dt, \quad c > 0.$$

Введем в рассмотрение вспомогательную строго гиперболическую систему

$$\mathcal{L}_{i\varepsilon}(u^i) = \varepsilon u_{tt}^i + \mathcal{L}_i(u^i). \quad (9)$$

Обозначим $K_{i\varepsilon} = K_i + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Лемма 2. Если выполнено условие (8) и $\varepsilon > 0$, то существует константа $\lambda_1 \geq \lambda_0$ такая, что для всех констант $\lambda \geq \lambda_1$ и всех функций из класса $K_L(Q_T)$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n \|u^i\|_1^2 \leq c \int_{Q_T} \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_i(u^i)u_t^i \exp(-\lambda t) dx dt, \quad c > 0.$$

Доказательство Леммы 1 и Леммы 2 проводится интегрированием по частям и использованием неравенства Коши.

Теорема 1. Если коэффициенты системы (1) таковы, что

$$a_{rs}^i(x), a_{sr}^i(x) \in C^2(Q_T), a_1, b_j^i, c_j^i \in C_1(Q_T)$$

и выполнено условие (2) и

$$2a_i(x, t) - |K_{it}(x, t)| \geq \delta > 0, \quad (10)$$

то для любых функций $f_i(x, t) \in W_2^2(Q_T)$, таких, что $f_{it}(x, t) \in L^2(Q_T)$ и $f_i(x, 0) = 0$ существует функция $u(x, t)$ из пространства $W_2^2(Q_T)$ являющаяся решением задачи (7), (5).

Доказательство теоремы проводится по схеме [2]:

- 1) методом Фаэдо-Галеркина с выбором специального базиса находим приближенные решения;
- 2) для приближенных решений выводим априорные оценки;
- 3) переходим к пределу, опираясь на свойства компактности.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (3), (4) и $2 \frac{\partial f_i}{\partial u^i} + K_{it} \leq -\delta < 0$, тогда «Видоизмененная» смешанная задача имеет единственное решение из класса $S_L(Q_T)$.

Следствие. Из единственности решения задачи, задачи (1), (6) следует единственность решения задачи (1), (5).

Для доказательства существования решение смешанной задачи (1), (5) рассмотрим систему уравнений вида

$$\mathcal{L}_i(u^i) + a_i(x, t)u_t^i = f_i(x, t, u, \nabla u). \quad (11)$$

Теорема 3. Если $2a_i(x, t) - |K_{it}(x, t)| \geq \delta > 0$, то для любых функций $f_i(x, t, u, \nabla u)$ таких, что $f_{it}(x, t, u, \nabla u) \in L^2(Q_T)$ для всех функций $u^i \in W_2^2(Q_T)$, $f_i(x, t, u, \nabla u) \in L_2(Q_T)$ и $f_i(x, 0, \dots, 0) = 0$

существует решение классической смешанной задачи (11), (5) из пространства $W_2^2(Q_T)$.

Доказательство теоремы проводится методом последовательных приближений и использованием теоремы 1. [3]

Следствие. Из существования решения задачи (11), (5) при условии $f_i(x, 0, \dots, 0) = 0$ следует существование решения задачи (11), (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Врагов В.Н. Смешанная задача для одного класса гиперболо-параболических уравнений. Дифференциальные уравнения. Т. 12, №1, 1976 г.
2. Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., «Наука», 1972 г.
3. Гаджиев М.М. Смешанная задача для одного нелинейного гиперболо-параболического уравнения. Дифференциальные уравнения. Т. 13, №2, 1977 г.

УДК 517.95

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ОПЕРАТОРОВ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ДЛЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

А.М. Гачаев
ГГНТУ им. акад. М.Д. Миллионщикова, Грозный,
С.Д. Умалатов
ДГТУ, Махачкала

Аннотация: статья посвящена спектральному анализу операторов, которые возникают при изучении краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка. Показано, что оператор вполне несамосопряженный.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение дробного порядка, спектральный анализ, функция Грина, краевые задачи.

В [1] был проведен спектральный анализ операторов вида

$$A_{\gamma}^{[\alpha, \beta]} u(x) = c_{\alpha} \int_0^x (x-t)^{\frac{1}{\alpha}-1} u(t) dt + \tilde{n}_{\beta, \gamma} \int_0^1 x^{\frac{1}{\beta}-1} (1-t)^{\frac{1}{\gamma}-1} u(t) dt.$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma, c_{\alpha}, c_{\beta, \gamma}$ — действительные числа, причем α, β, γ — положительные. Исследование подобных операторов посвящена работа Г.М. Губреева [2]. Эти операторы возникают при изучении краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка (см. [3]) и там указанная литература, где строятся соответствующие функции Грина.

В частности, в [1] показано, что оператор

$$A^{\rho} u(x) = A_{\rho}^{[\rho, \rho]} u(x) = \frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})} \int_0^x (x-t)^{\frac{1}{\rho}-1} u(x) dt - \frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})} \int_0^1 x^{\frac{1}{\rho}-1} (1-t)^{\frac{1}{\rho}-1} u(t) dt$$

вполне несамосопряженный [4] при $\rho > 1$, а при $0 < \rho < 1$ ядро оператора A^{ρ} неотрицательно, и что Фредгольмов спектр оператора A^{ρ} совпадает с множеством корней целой функции типа Миттаг-Леффера.

$$E_{\rho} |\lambda; \rho^{-1}| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\rho^{-1} + k\rho^{-1})}$$

Из только что сказанного следует, что все собственные числа оператора A^{ρ} комплексные при $\rho > 1$, а при $0 < \rho < 1$ оператор A^{ρ} имеет вещественные собственные числа (правда при $\frac{1}{2} < \rho < 1$

множество вещественных собственных чисел конечно число), или что тоже самое, что все нули функции $E_\rho(\lambda; \rho^{-1})$ комплексные при $\rho > 1$, а при $0 < \rho < 1$ функция $E_\rho(\lambda; \rho^{-1})$ имеет вещественные нули. Сказанное подтверждает гипотезу о наличии вещественных нулей у функции $E_\rho(\lambda; \rho^{-1})$ при $\frac{1}{2} < \rho < 1$, высказанную в монографии [5 стр. 248].

Данная работа также посвящена изучению краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка и им сопутствующих интегральных операторов вида $A_\gamma^{[\alpha; \beta]}$.

Пусть $\{\gamma_k\}_0^n$ - произвольная совокупность вещественных чисел, подчиненных условию $0 < \gamma_j \leq 1$, ($j = 0, 1, \dots, n$). Обозначим

$$\sigma_k = \sum_{j=0}^k \gamma_j - 1; \quad \mu_k = \sigma_k + 1 = \sum_{j=0}^k \gamma_j, \quad (k = 0, 1, \dots, n) \text{ и предположим, что}$$

$$\frac{1}{\rho} = \sum_{j=0}^n \gamma_j - 1 = \sigma_n = \mu_n - 1 > 0.$$

Следуя [6], введем в рассмотрение дифференциальные операторы,

$$D^{(\sigma_0)} f(x) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_0)}}{dx^{-(1-\gamma_0)}} f(x),$$

вообще говоря, дробных порядков.

$$D^{\sigma_1} f(x) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_1)}}{dx^{-(1-\gamma_1)}} \frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}} f(x),$$

$$D^{\sigma_n} f(x) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}} \frac{d^{\gamma_{n-1}}}{dx^{\gamma_{n-1}}} \cdots \frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}}.$$

При этом отметим, что если $\gamma_0 = \gamma_1 = \dots = \gamma_n = 1$ то очевидно, что

$$D^{(\sigma_k)} f(x) = f^{(k)}(x), \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Чтобы оттенить основные идеи, вначале исследуем простейшие случаи. И так, мы положим, что $\gamma_3 = \gamma_4 = \dots = \gamma_n = 0$, и рассмотрим задачу, которая является аналогом хорошо известной задачи Штурма - Лиувилля. Эта задача, которую мы так и в [7], назовем задачей (А), состоит в следующем:

В классе

$$L_2(0,1)(L_1(0,1))$$

отыскать нетривиальное решение уравнения

$$D^{(\sigma_2)} y - [\lambda + q(x)]y = 0 \tag{1}$$

$x \in (0,1)$ удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{cases} D^{(\sigma_0)} \Big|_{x=0} \cos \alpha + D^{(\sigma_1)} \Big|_{x=0} \sin \alpha = 0 \\ D^{(\sigma_0)} \Big|_{x=1} \cos \beta + D^{(\sigma_1)} \Big|_{x=1} \sin \beta = 0 \end{cases} \tag{2}$$

где $\lambda, \alpha, \beta; (\operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Im} \beta = 0)$ – произвольные параметры, $q(x) \in L_2(0,1)$. М. М. Джрбациян пишет, что [7] "вопросы полноты системы собственных функций задачи (А), или более тонкий вопрос, составляют ли эти функции базис в $L_2(0,1)$, имеет безусловный интерес. Но их решения, по-видимому, сопряжены со значительными аналитическими трудностями".

Что система собственных функций задачи (А) полна в $L_2(0,1)$ когда $q(x) \equiv 0$, было доказано в [9].

Позже, М.М. Маламуд и его ученики [10]-[11] также установили полноту системы собственных функций подобных задач, в случае, когда $q(x)$ аналитическая функция.

В данной работе предполагается что $q(x) > 0$.

Рассмотрим различные варианты уравнения (1). При $\gamma_0 = \gamma_1 = 1$, уравнение (1) переходит в уравнение

$$\frac{1}{\Gamma(1-\gamma_2)} \int_0^x \frac{u''(t)}{(x-t)^{\gamma_2}} dt - (\lambda + q(x)) u(x) = 0, \quad (3)$$

которое называется дробными осцилляционным уравнением [5], и оператор $D^{(\sigma)}$ называется оператором дробного дифференцирования в смысле Капуто [5]. При $\gamma_0 = \gamma_2 = 1$, уравнение (1) переходит в уравнение

$$\frac{1}{\Gamma(1-\gamma_1)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{u'(t)}{(x-t)^{\gamma_1}} dt - (\lambda + q(x)) u(x) = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4), как модельное уравнение дробного порядка $1 < \sigma < 2$ было исследовано [3].

Теорема 1. Система собственных функций задачи (А)

$$\frac{1}{\Gamma(1-\gamma_1)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{u'(t)}{(x-t)^{\gamma_1}} dt - (q(x) + \lambda) u(x) = 0,$$

$u(0) = 0, u(1) = 0$ полна в $L_2(0,1)$.

Доказательство теоремы 1 основывается на лемме 1.

Лемма 1. Оператор S , индуцированный дифференциальным выражением

$$l(u) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma_1)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{u'(t)}{(x-t)^{\gamma_1}} dt - q(x)u(x),$$

и краевыми условиями

$$u(0) = 0, u(1) = 0,$$

имеет обратный.

Доказательство леммы 1. Лемма 1 будет доказана, если мы покажем что задача (А) при $q(x) > 0$ имеет единственное тривиальное

решение $u(x) = 0$. Для доказательства последнего утверждения поступим следующим образом. Обе части уравнения

$$\frac{1}{\Gamma(1-\gamma_1)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{u'(t)}{(x-t)^{\gamma_1}} dt = q(x) u(x)$$

умножим на $(x-t)^{\gamma_1}$, и полученное выражение проинтегрируем от 0 до x , получим

$$\frac{1}{\Gamma(1-\gamma_1)} \int_0^x (x-t)^{\gamma_1} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u'(\xi)}{(t-\xi)^{\gamma_1}} d\xi dt = \int_0^x (x-t)^{\gamma_1} q(t) u(t) dt.$$

Вычислим интеграл

$$Iu = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma_1)} \int_0^x (x-t)^{\gamma_1} \left(\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u'(\xi)}{(t-\xi)^{\gamma_1}} d\xi \right) dt.$$

Имеем

$$\begin{aligned} Iu &= \frac{1}{\Gamma(1-\gamma_1)} \int_0^x (x-t)^{\gamma_1} d \left(\int_0^t \frac{u'(\xi)}{(t-\xi)^{\gamma_1}} d\xi \right) = \\ &= -x^{\gamma_1} D^{(\sigma_1)} u \Big|_{t=0} + \frac{\Gamma(\gamma_1)\gamma_1}{\Gamma(1)} \int_0^x u'(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Таким образом

$$Iu = -x^{\gamma_1} D^{(\sigma_1)} u \Big|_{t=0} + c [u(x) - u(0)].$$

Таким образом, имеем

$$\tilde{n}u(x) = x^{\gamma_1} D^{(\sigma_1)} u \Big|_{t=0} + \int_0^x (x-t)^{\gamma_1} q(t) u(t) dt, \quad c = \Gamma(1+\gamma_1).$$

Следовательно, общее решение уравнения

$$\frac{1}{\Gamma(1-\gamma_1)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{u'(t)}{(x-t)^{\gamma_1}} d\xi - q(x) u = 0,$$

удовлетворяющее условию $u(0) = 0$, имеет вид

$$\begin{aligned} u(x) &= \tilde{c} x^{\gamma_1} + \frac{1}{c} \int_0^x (x-t)^{\gamma_1} q(t) u(t) dt = \tilde{c} x^{\gamma_1} + \tilde{A} u(x). \\ \tilde{c} &= \frac{D^{(\sigma_1)} u \Big|_{t=0}}{c}. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения следует, что

$$u(x) = \tilde{c} (I - \tilde{A})^{-1} x^{\gamma_1} = c (x^{\gamma_1} + \tilde{A} x^{\gamma_1} + (\tilde{A})^2 x^{\gamma_1} + \dots + (\tilde{A})^n x^{\gamma_1} + \dots).$$

Так как

$$\tilde{A} x^{\gamma_1} = \int_0^x (x-t)^{\gamma_1} q(t) t^{\gamma_1} dt,$$

то

$$A^2 x^{\gamma_1} = A(Ax^{\gamma_1}) = \int_0^x (x-t)^{\gamma_1} q(t) \left(\int_0^t (t-\xi)^{\gamma_1} q(\xi) \xi^{\gamma_1} d\xi \right) dt.$$

Отсюда ядро оператора A^2 равно

$$K_2(t; s) = \int_s^t (t - \tau)^{\gamma_1} q(\tau) (\tau - s)^{\gamma_1} q(s) d\tau.$$

Ядро оператора A^n определяется по известной формуле

$$K_n(t; s) = \int_s^t K(t; s) K_{n-1}(\tau; s) d\tau.$$

Так как ядро операторов A, A^2, \dots, A^n положительны, то функция

$$u(x) = \tilde{c} (x^{\gamma_0} + Ax^{\gamma_1} + (\tilde{A})^2 x^{\gamma_1} + \dots + (\tilde{A})^n x^{\gamma_1} + \dots)$$

При $x=1$, не может обратиться в ноль, что и доказывает лемму 1.

Теперь приведем доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы 1 опирается на известную теорему В.Б. Лидского [12]. В соответствии с теоремой В.Б. Лидского [12], достаточно установить, что оператор S^{-1} является диссипативным и ядерным.

Пусть $u(t)$ любая функция из области определения

$$D(s) \subset L_2(0,1).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(Su, \bar{u}) &= \frac{1}{\Gamma(1-\gamma_1)} \operatorname{Re} \int_0^1 \left(\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{u'(t)}{(x-t)^{\gamma_1}} dt + q(x) \right) dx = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\gamma_1)} \operatorname{Re} \int_0^1 \left(\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{u'(t)}{(x-t)^{\gamma_1}} dt \bar{u}(x) \right) dx + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma_1)} \operatorname{Re} \int_0^1 q(x) u(x) \bar{u}(x) dx. \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{1}{\Gamma(1-\gamma_1)} \operatorname{Re} \int_0^1 \left(\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{u'(t)}{(x-t)^{\gamma_1}} dt \bar{u}(x) \right) dx = - \frac{1}{\Gamma(1-\gamma_1)} \operatorname{Re} \left(\int_0^1 \frac{u'(\xi)}{(x-\xi)^{\gamma_1}} d\xi, \bar{u}'(x) \right).$$

Воспользуемся теоремой Мацаева-Поланта ([13], [14] стр. 481).

Теорема Мацаева-Поланта гласит, что значение формы $\left(\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f, f \right)$

лежит в угле $|\arg z| < \frac{\pi\alpha}{2}$. Итак, из теоремы Мацаева-Поланта следует,

что оператор

$$Tu = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\gamma_1)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{u'(t)}{(x-t)^{\gamma_1}} dt \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$

является не только диссипативным, но даже и секториальным; значения формы (Su, u) лежат в угле $|\arg z| \leq \frac{\pi\gamma_1}{2}$. Теперь из

диссипативности оператора S следует и диссипативность оператора S^{-1} . Далее установим, что оператор S^{-1} является ядерным. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ и $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$ собственные значения операторов S и T соответственно, пронумерованные в порядке убывания их модулей.

Тогда [8] известно, что $|\lambda_n - \mu_n| \leq \|q(x)\|$. Теперь, учитывая, что собственные числа оператора T совпадают с нулями функции $E_\rho(\lambda; \rho^{-1})$ ([1], [8]), а асимптотика нулей функции Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(y + k_\rho)}, \quad \rho > 0$$

хорошо изучена, то имеем что оператор S^{-1} имеет конечный спектральный след, т.е. оператор S^{-1} ядерный.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т.С. Алероев. Об одном классе операторов, сопутствующих дифференциальным уравнениям дробного порядка. Сибирский математический журнал. 2005, 46, номер 6, стр. 1201-1207.
2. Г.М. Губреев. Регулярные ядра Миттаг-Леффлера и спектральное разложение одного класса несамосопряженных операторов. Известия РАН. Серия математика, 69, №1, стр. 17-61, 2005 г.
3. Т.С. Алероев. О полноте систем собственных функций одного оператора дробного дифференцирования. Дифференциальные уравнения, том 36, №6, 2000 г., стр. 829-830.
4. М.С. Бродский. Треугольные и жордановы представления операторов. М.: Наука 1969 г.
5. А.М. Нахушев. Дробное исчисление и его приложения. М.: Физматлит, 2003, стр. 272.
6. М.М. Джрбациян, А.В. Нерсесян. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук 1959, 12, 5.
7. М.М. Джрбациян. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук 1970, 75, 2, стр. 71-96.
8. Т.С. Алероев. О собственных значениях одного класса несамосопряженных операторов. Дифференциальные уравнения, том 30, №1, стр. 169-171, 1996 г.

УДК 378

ПРИМЕНЕНИЕ СТУДЕНТАМИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СРЕДСТВ ПРИ РЕШЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ВУЗЕ

А.Г. Гейн, УрФУ, Екатеринбург
И.В. Куликова, УрГУПС, Екатеринбург

Аннотация: в статье приведены и обсуждаются результаты диагностики готовности студентов к использованию различных вычислительных средств на младших курсах технических вузов при решении математических задач, оценивается эффективность применения специальных заданий для развития у студентов компетенций в применении таких средств.

Ключевые слова: системы компьютерной математики, развитие вычислительных компетенций, обучение математике на младших курсах.

Развитие современных информационных технологий расширяет возможности использования вычислительных средств в образовательном процессе. Прикладное программное обеспечение компьютеров и смартфонов с каждым годом становится более доступным. Огромный спектр сайтов со справочной информацией, различные онлайн-калькуляторы – все это позволяет студентам находить способы решения задач, не прилагая больших усилий к пониманию существенных взаимосвязей математических методов и моделей. Обычные инженерные калькуляторы, которые входят в программное обеспечение смартфона, используются ими в том случае, если нет устойчивого доступа к интернету в процессе решения задачи [1].

Педагогическое наблюдение процесса решения студентами математических задач показывает, что они в большинстве случаев и не пытаются найти самостоятельно решение, а обращаются к специальным сайтам, которые предоставляют готовые ответы. Возникает опасность в неспособности адекватно оценить представленные кем-то результаты вычислений. Осознание студентами такой опасности, к сожалению, наблюдается крайне редко. Выявить наличие технических или вычислительных ошибок могут, как правило, только те студенты, которые успешно обучались в школе по математике и информатике, знакомы с основами программирования и проявляют интерес к познавательной деятельности [2, 3].

В то же время, проведение студентами инженерных расчетов при написании курсовых проектов и дипломных работ на старших курсах связано с выполнением трудоемких математических преобразований и вычислений. Широкое распространение для

решения инженерных и научных задач получили различные системы компьютерной математики. Подготовка студентов к их эффективному использованию, по мнению авторов [4, 5] во многом обеспечивается включением в обучение математике на первых курсах вуза таких дидактических заданий, решение которых предопределяет их применение.

Разделяя указанную выше точку зрения, мы провели диагностику отношения студентов к средствам вычислений. Диагностика осуществлялась методом анонимного опроса: группе студентов, обучающихся на втором курсе технических специальностей, было предложено ответить на три вопроса. Содержание вопросов и варианты ответов представлено в табл. 1. Студентам нужно было выбрать только один наиболее приемлемый с их точки зрения вариант ответа на каждый вопрос. Выборка составила 61 человек.

Студентам, которые приняли участие в опросе, на первом и втором курсах на занятиях по математике предлагались разработанные нами дидактические задания, в которых инициировалось применение системы *Mathcad* при решении учебных задач.

Таблица 1

Использование вычислительных средств в обучении математике

Вопрос	Варианты ответов	Распределение ответов	
		Кол-во	%
Какое вычислительное средство Вы предпочитали использовать при решении задач по математике <i>в школе?</i>	Инженерный калькулятор	6	10
	Сайты с онлайн-калькуляторами на персональном компьютере	31	51
	Мобильные приложения с онлайн-калькуляторами на смартфоне	23	39
Какое вычислительное средство Вы предпочитали использовать при решении задач по математике <i>на</i>	Инженерный калькулятор	8	13
	Сайты с онлайн-калькуляторами на персональном компьютере	30	49
	Мобильные приложения с онлайн-калькуляторами на смартфоне	22	36

первом курсе обучения в вузе?	Система компьютерной математики <i>Mathcad</i>	1	2
Какое вычислительное средство Вы предпочитаете использовать при решении задач по математике на втором курсе обучения в вузе?	Инженерный калькулятор	3	5
	Сайты с онлайн-калькуляторами на персональном компьютере	22	36
	Мобильные приложения с онлайн-калькуляторами на смартфоне	20	33
	Система компьютерной математики <i>Mathcad</i>	16	26

Поясним, почему нами использовались такие формулировки вопросов. Вопрос, обращаются ли студенты к специальным сайтам, которые предоставляют готовые ответы, даже при условии анонимности, мы сочли допускающим в ответах значительное отклонение от реальной ситуации. Разумеется, положительные ответы по использованию сайтов и мобильных приложений тоже не означают, что все такие респонденты пользуются готовыми ответами. Но те студенты, которые используют системы компьютерной математики, вынуждены самостоятельно реализовать схему решения задачи.

Результаты анкетирования показывают, что при методически разработанной системе применения вычислительных инструментов компьютерной математики при решении учебных задач наблюдается тенденция увеличения количества студентов, которые по мере освоения системы компьютерной математики *Mathcad* предпочитают пользоваться ею, нежели онлайн-калькуляторами. Конечно, 26% – это существенно ниже того, что хотелось бы наблюдать по результатам обучения. Но и этот результат позволяет однозначно сделать вывод о необходимости дальнейшего совершенствования предложенной нами системы дидактических заданий, направленных на развитие у студентов компетенции в использовании средств компьютерной математики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшкова К.В. Развитие вычислительной грамотности обучающихся основной школы средствами информационных технологий / К.В. Горшкова, Л.Н. Филонова // Образование XXI века: подходы, технологии, методики: Сборник научных статей

Международной научно-практической конференции. В 2-х томах, Курган, 27 мая 2022 года / Отв. редактор Г.М. Федосимов. Том 1. – Курган: Курганский государственный университет, 2022. – С. 44-47. – EDN XVBDUR.

2. Блинов И.Н. Компьютерное обучение в условиях цифровизации образования / И.Н. Блинов, В.С. Романчик // Трансформация механико-математического и IT-образования в условиях цифровизации: Материалы международной научно-практической конференции, посвященной 65-летию ММФ. В 2-х частях, Минск, 26–27 апреля 2023 года / Редколлегия: Н.В. Бровка (гл. ред.) [и др.]. Том Часть 2. – Минск: Белорусский государственный университет, 2023. – С. 17-20. – EDN HGANXX.

3. Петрова Л.С. Развитие информационной компетенции у студентов инженерных направлений подготовки при освоении специальных разделов математики / Л.С. Петрова // Математическое образование в школе и вузе: опыт, проблемы, перспективы (MATHEDU' 2023): материалы XII Международной научно-практической конференции в рамках IV Международного форума по математическому образованию, Казань, 27 марта – 01 апреля 2023 года. – Казань: Академия наук Республики Татарстан, 2023. – С. 312-318. – EDN AQWXHM.

4. Воронько Т.А. Интерактивные технологии в формировании самостоятельной деятельности студентов в обучении математике / Т.А. Воронько, Н.Г. Дендеберя, Е.Ю. Лещенко // Проблемы современного педагогического образования. – 2022. – № 76-3. – С. 61-63. – EDN AWYQDA.

5. Черная Е.С. Использование компьютерных средств вычислительной техники при создании обучающих курсов для вузов / Е.С. Черная, Д.А. Железко // Вестник Луганского государственного университета им. Владимира Даля. – 2021. – № 10(52). – С. 145-148. – EDN XIKJQU.

УДК 512.542

**ПРОИЗВОДНАЯ π -ДЛИНА π -РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ,
У КОТОРОЙ ПОРЯДКИ КОФАКТОРОВ ПОДГРУПП
СВОБОДНЫ ОТ КВАДРАТОВ**

Д.В. Грицук

Аннотация: исследовано строение π -разрешимых групп, у которых кофакторы подгрупп из факторов ограничены. Установлено, что если порядки кофакторов субнормальных подгрупп свободны от квадратов, то производная π -длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 4. В частности, если $2 \notin \pi$, то производная π -длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает.

Ключевые слова: π -разрешимая группа, производная π -длина, кофактор.

Рассматриваются только конечные группы. Все используемые понятия и обозначения соответствуют обозначениям, принятым в [1, 2].

Пусть P – множество всех простых чисел, а π – некоторое множество простых чисел. Дополнение к π во множестве P обозначается через π' . Символом π обозначается также функция, определенная на множестве всех натуральных чисел N следующим образом: $\pi(a)$ – множество простых чисел, делящих натуральное число a . Для группы G и ее подгруппы H считаем, что $\pi(G) = \pi(|G|)$ и $\pi(G:H) = \pi(|G:H|)$.

Зафиксируем множество простых чисел π . Если $\pi(m) \subseteq \pi$, то натуральное число m называется π -числом. Группа G называется π -группой, если $\pi(G) \subseteq \pi$, и π' -группой, если $\pi(G) \subseteq \pi'$. В этом случае $\pi(G) \cap \pi' = \emptyset$.

Пусть G – π -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_m = G,$$

каждый фактор которого является либо абелевой π -группой, либо π' -группой. Наименьшее число абелевых π -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется производной π -длиной π -разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^a(G)$ [3]. Основные свойства производной π -длины π -разрешимой группы получены в работах [4, 5].

В теории групп всякую подгруппу H группы G можно окружить двумя нормальными в G подгруппами – нормальным замыканием H^G и ядром H_G , где H^G является наименьшей нормальной в G подгруппой, содержащей H , а H_G – наибольшей нормальной в G

подгруппой, содержащейся в H . Фактор-группа H/H_G называется кофактором чподгруппы H группы G . Исследовано влияние порядка кофактора H/H_G подгруппы H группы G на производную π -длину π -разрешимой группы G . Доказана следующая теорема.

Теорема. Если у π -разрешимой группы G порядок кофактора H/H_G свободен от квадратов для произвольной субнормальной подгруппы H , то $l_\pi^a(G/\Phi(G)) \leq 4$. В частности, если $2 \notin \pi$, то $l_\pi^a(G/\Phi(G)) \leq 2$.

Здесь $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини.

ЛИТЕРАТУРА

1. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York. – 1967.
2. Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006.
3. Монахов В.С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В.С. Монахов. // Математические заметки – 2006. – Т. 80, № 4. – Р. 573–581.
4. Грицук Д.В. О производной π -длине π -разрешимой группы / Д.В. Грицук, В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.
5. Monakhov V.S. On derived π -length of a finifite π -solvable group with supersolvable π -Hall subgroup / V.S. Monakhov, D.V. Gritsuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – Vol. 16, 2. – Р. 233–241.

УДК 004.85

ВИЗУАЛЬНОЕ ВОСПРИЯТИЕ ОБЪЕКТОВ В СВЁРТОЧНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЯХ

А.А.-П. Джанмурзаев
ДГТУ, Махачкала

Аннотация: глубокое обучение одно из самых актуальных направлений искусственного интеллекта, оно позволит человеку полностью освободиться от его каждодневных утилитарных задач, которые сегодня занимают всё его время. Визуализация объектов для дальнейшего их использования в качестве графической информации позволит решить многие задачи искусственного интеллекта. Процесс восприятия требует создания специализированных структур в виде

свёрточных нейронных сетей. В статье рассматривается подход к использованию свёрточных нейронных сетей для визуализации окружающих нас объектов с целью дальнейшей их использования в качестве графической информации.

Ключевые слова: свёрточные нейронные сети, глубокое обучение, визуализация объектов.

Визуальное восприятие объектов - это основа современного глубокого обучения. Объекты, которые нас окружают находятся в сложной взаимосвязи между собой, поэтому требуется сложный визуальный аппарат способный распознавать объекты в реальном режиме времени, с учётом постоянного роста разнообразия этих объектов.

Свёрточные нейронные сети - это один из самых захватывающих и практически значимых разделов в мире глубокого обучения. Их актуальность трудно переоценить - они находят применение в широком спектре областей, начиная от классификации изображений и распознавания образов до обработки естественного языка, и анализа медицинских данных. Свёрточные нейронные сети показали свою эффективность во многих областях, превосходя предыдущие методы машинного обучения. Это произошло благодаря их способности автоматически извлекать признаки из входных данных и строить иерархии признаков, что делает их очень эффективными в анализе сложных данных, таких как изображения и видео.

Свёртка изображения заключается в отнесении изображения к одному из кластеров, которые содержат аттракторы [2] позволяющие форматировать изображение в соответствии с заложенным алгоритмом обучения нейросети (рис. 1).



Рис. 1 – Аттракторы нейронной сети.

Для своего формирования изображение должно пройти через 3 спектра (рис. 2):

1. Спектр ожидания
2. Спектр имитации

3. Спектр синхронизации

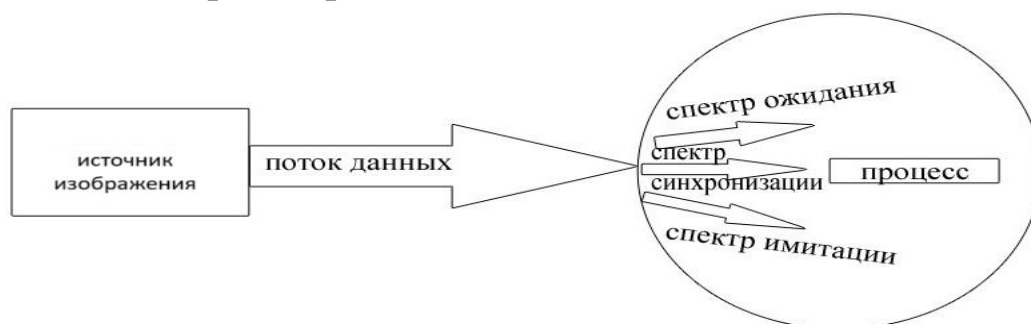


Рис.2 – Формирование изображения в свёрточной нейронной сети.

Спектр ожидания, вбирает «живые» элементы изображения [1], т.е. те элементы, которые подвержены частым изменениям (часто меняют своё состояние с течением времени) (рис. 3).



Рис. 3 – Спектр ожидания в свёрточной нейронной сети.

Динамическую часть изображения можно отсечь если пропустить через фильтр преобразователей кодов. Изображение можно представить в виде кода, где каждый цвет определяется своей логической единицей (рис. 4).



Рис.4 – Декомпозиция изображения.

Спектр имитации, обрабатывает «тяжёлые» элементы изображения, те элементы, которые структурно могут быть отнесены к разным кластерам. Неоднозначность на этом этапе решается

методом имитации изображения – нахождения обратимой структуры (рис. 5).

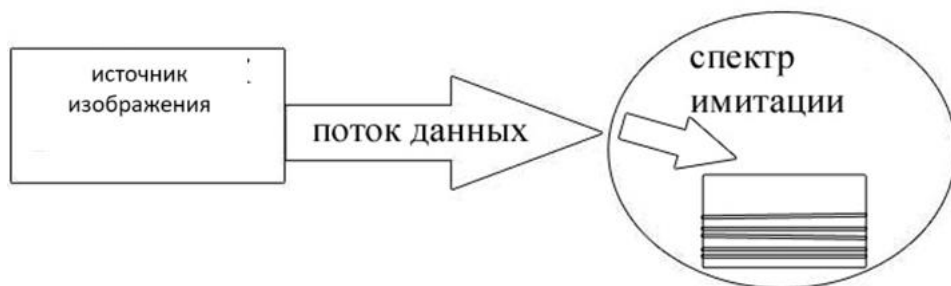


Рис. 5 – Спектр имитации в свёрточной нейронной сети.

В спектре синхронизации обратимые структуры притягиваются одним из аттракторов нейросети, в результате происходит распознавание объекта изображения (рис. 6).



Рис. 6 – Спектр синхронизации в свёрточной нейронной сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джанмурзаев А.А. Организация потоков в компьютерных сетях. – М.: Парнас, 2018 – 102 с.
2. Джанмурзаев А.А.-П., Алиев Э.Р. Когнитивный подход анализа сетевого потока. Сборник трудов международной научной конференции «Мухтаровские чтения: актуальные проблемы математики, методики ее преподавания и смежные вопросы», посвященной 50-летию ДГТУ. Махачкала: ДГТУ, 2022 г.

УДК 517.9

РАЗРЕШИМОСТЬ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С НУЛЕВЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

М.В. Донцова
ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород

Аннотация: в статье приведены условия, при которых существует нелокальное решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с нулевыми правыми частями.

Ключевые слова: задача Коши, метод, глобальные оценки.

В данной работе проведено исследование нелокальной разрешимости задачи Коши для системы вида

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + (au(t, x) + bv(t, x) + h_1)\partial_x u(t, x) = 0, \\ \partial_t v(t, x) + (cu(t, x) + gv(t, x) + h_2)\partial_x v(t, x) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $u(t, x), v(t, x)$ – неизвестные функции, a, b, c, g, h_1, h_2 – известные положительные константы, с начальными условиями:

$$u(0, x) = \varphi_1(x), v(0, x) = \varphi_2(x) \quad (2)$$

в области $\Omega_T = \{(t, x) | 0 \leq t \leq T, x \in (-\infty, \infty), T > 0\}$.

Получена система интегральных уравнений [1], [2]:

$$w_1(s, t, x) = \varphi_1(x - \int_0^t (aw_1(v, t, x) + bw_3(v, t, x) + h_1)dv), \quad (3)$$

$$w_2(s, t, x) = \varphi_2(x - \int_0^t (cw_4(v, t, x) + gw_2(v, t, x) + h_2)dv), \quad (4)$$

$$w_3(s, t, x) = w_2(s, s, x - \int_s^t (aw_1(v, t, x) + bw_3(v, t, x) + h_1)dv), \quad (5)$$

$$w_4(s, t, x) = w_1(s, s, x - \int_s^t (cw_4(v, t, x) + gw_2(v, t, x) + h_2)dv). \quad (6)$$

Обозначим $\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ – пространство функций один раз дифференцируемых по переменной t , дважды дифференцируемых функций по переменной x , имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на Ω_T .

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{C}^2(R)$ и выполняются условия:

- 1) $a > 0, b > 0, c > 0, g > 0, h_1 > 0, h_2 > 0$,
- 2) $\varphi_1'(x) \geq 0, \varphi_2'(x) \geq 0$ на R .

Тогда для любого $T > 0$ задача Коши (1), (2) имеет единственное решение $u(t, x), v(t, x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$, которое определяется из системы интегральных уравнений (3)–(6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Доклады РАН. 2001. Т.379, №1. С. 16–21.

2. Донцова М.В. Нелокальная разрешимость одной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со свободными членами // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2014. № 5. Ч. 1. С. 37-38.

УДК 517.9

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ЛОКАЛЬНОЙ ГИПЕРТЕРМИИ ОБЛАСТИ КОЛЕННОГО СУСТАВА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ОХЛАДИТЕЛЕЙ

**О.В. Евдулов, М.А. Хазимова, И.Ю. Гамзалова
ДГТУ, Махачкала**

Аннотация: в статье представлено моделирование теплофизических процессов в термоэлектрическом устройстве при локальной гипотермии области коленного сустава, определено температурное поле поперечного сечения коленного сустава, подвергающегося охлаждению.

Ключевые слова: коленный сустав, локальная гипотермия, термоэлектрическое устройство, термоэлектрический модуль, температура, математическая модель, расчет.

В современном, постоянно изменяющемся мире человек все чаще находится в движении, что является одним из факторов наличия травмоопасности. В структуре травм ведущее место занимают травмы коленного сустава. Основным механизмом травматического повреждения является интенсивное внешнее физическое воздействие на коленную область, превышающее прочность тканей, и вызывающее нарушение трофики и иннервации сустава, что провоцирует дегенеративные процессы и развитие артроза.

Среди существующих методов консервативного лечения коленных суставов выделяются разнообразные физические методы,

недостатками которых являются их низкая эффективность и дискомфортность, сложность и неудобство в реализации, недостаточная точность дозировки теплового воздействия. Для осуществления локальной гипотермии коленного сустава с целью проведения оздоровительных процедур перспективным является применение термоэлектрических устройств (ТЭУ) [1-3], отличающихся бесшумностью, надежностью работы, высокой функциональностью, а также экологичностью.

При разработке математической модели ТЭУ для локальной гипотермии коленного сустава рассмотрена физическая модель объекта воздействия, представляющая собой структуру, поперечное сечение которой с основными геометрическими размерами в миллиметрах изображено на рис. 1 [4]. На рисунке обозначены следующие области: 1 и 2 - костная ткань, 3 - мышечная ткань, 4 - кожный покров.

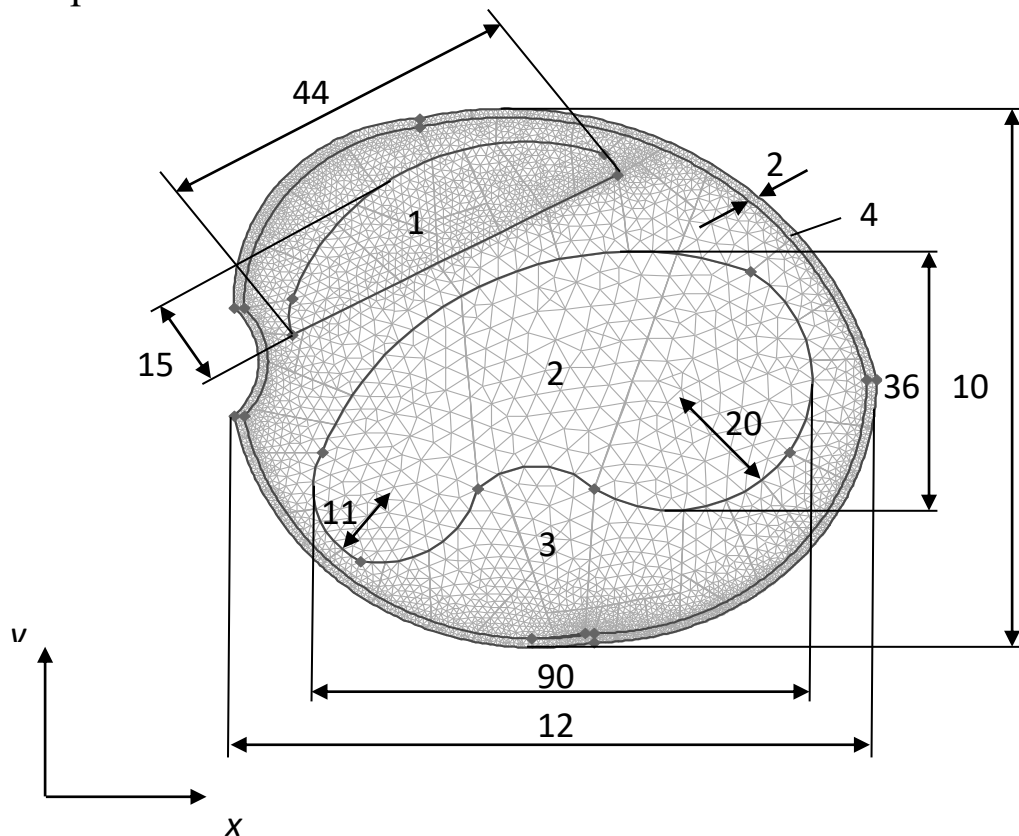


Рис. 1. Физическая модель поперечного сечения коленного сустава

На объект воздействия – коленный сустав - по периметру направлен тепловой поток от ТЭУ, содержащий в своей конструкции стандартные термоэлектрические модули (ТЭМ), со стороны холодных спаев сопряженные с тепловыравнивающей теплообменной структурой, а со стороны горячих спаев - с теплоотводящей

теплообменной структурой. В качестве тепловыравнивающей теплообменной структуры может выступать гибкая цельнометаллическая радиаторная система (например, в виде медной или латунной кольцевой поверхности), плотно соприкасающейся с телом человека, а в качестве теплоотводящей - цельнометаллическая радиаторная система, обдуваемая вентиляторным агрегатом.

Математическая модель данного устройства состоит в решении трех задач: расчете температурного поля поперечного сечения коленного сустава, подвергающегося охлаждению, определении параметров ТЭМ, входящих в состав ТЭУ, расчете системы отвода теплоты от горячих спаев термоэлементов, входящих в состав термомодулей.

Для определения температурного поля поперечного сечения коленного сустава, подвергающегося охлаждающему воздействию посредством ТЭУ, решаем дифференциальное уравнение:

$$\lambda_i \left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} \right) + Q_i = \rho_i C_i \frac{\partial T_i}{\partial \tau}, \quad (1)$$

где T - температура, λ - коэффициент теплопроводности, C - теплоемкость, ρ - плотность; x, y - координаты, Q - количество теплоты, выделяемое в единице объема в единицу времени в соответствующей области коленного сустава, $i=1...4$ и соответствует обозначениям, принятым на рис. 1.

Начальные условия:

$$T_1 = T_2 = T_3 = 309,6 \text{ К при } \tau = 0.$$

Граничные условия определяют равенство тепловых потоков на границах соприкосновения выделенных областей коленного сустава, а также наличие теплового потока $q_{\text{ТЭУ}}$, соответствующего холодопроизводительности ТЭУ на внешней поверхности коленного сустава.

Решение дифференциального уравнения (1) с соответствующими начальными и граничными условиями численным методом конечных элементов (на рис. 1 также показана конечно-элементная сетка) позволяет определить температурное поле поперечного сечения коленного сустава в двух- и одномерном виде в стационарном режиме, а также изменение температуры в его различных точках во времени для различных характеристик ТЭМ, теплообменных структур, условий теплообмена с окружающей средой.

На основе анализа значений холодопроизводительности ТЭМ, входящих в состав ТЭУ и определяющих температурное поле поперечного сечения коленного сустава, может быть произведен расчет параметров последних, составляющий дальнейшую задачу математического моделирования ТЭУ. Искомыми величинами в данном случае являются геометрические размеры термоэлементов, входящих в состав ТЭМ, величина питающего электрического тока, напряжение, потребляемая электрическая энергия, значение холодильного коэффициента, оптимального перепада температур между спаями термоэлементов. Эти параметры рассчитаны с использованием программы Thermoelectric system calculation (производитель ООО "Криотерм", г. Санкт-Петербург) [5].

На основе рассмотренной математической модели проведен численный эксперимент и теоретические исследования ТЭУ для локальной гипотермии коленного сустава. Теплофизические параметры областей коленного сустава следующие: $\lambda_1=0,34$ Вт/(м·К), $\lambda_2=0,439$ Вт/(м·К), $\lambda_3=0,407$ Вт/(м·К), $\rho_1=1036$ кг/м³, $\rho_2=1050$ кг/м³, $\rho_3=1036$ кг/м³, $C_1=3127$ Дж/(кг·К), $C_2=4020$ Дж/(кг·К), $C_3=3458$ Дж/(кг·К), $Q_{1,2,3}=490$ Вт/м³ [6].

Получены двумерные температурные поля поперечного сечения коленного сустава для мощностей ТЭМ, входящих в состав ТЭУ соответственно 50 Вт, 60 Вт, 70 Вт при выходе объекта воздействия на стационарный режим. На их основе осуществлен качественный анализ картины температурного поля поперечного сечения коленного сустава. Согласно результатам расчета, во всех трех случаях наблюдается увеличение температуры от поверхности коленного сустава, соприкасающейся с ТЭУ, к ее центру в радиальном направлении. Изменение температуры носит равномерный характер, что связано с постоянством теплофизических свойств выделенных областей объекта воздействия, а также постоянством теплового потока от ТЭУ к поверхности коленного сустава, что принято при построении математической модели. При увеличении мощности ТЭМ, входящих в состав ТЭУ, температура всех областей коленного сустава уменьшается, причем снижение температуры также носит равномерный характер ввиду выше упомянутых ограничений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hu B., Shi X.-L., Chen Z.-G., Zou J. Thermoelectrics for medical applications: progress, challenges and perspectives // Chemical engineering journal. 2022. Vol. 437. P.135268.
2. Yevdulov O.V., Ragimova T.A. Investigation of thermoelectric system for local freezing of tissues of the larynx // Journal of Thermoelectricity. 2015. № 2. С. 86.
3. Zaferani S.H., Ghomashchi R., Sams M.W, Chen Z.-G. Thermoelectric coolers as thermal management systems for medical application: design, optimization and advancement // Nano energy. 2021. Vol. 90. P. 106572.
4. Гилев М.В. Анатомия коленного сустава. Екатеринбург: Издательство УГМУ, 2016. 60 с.
5. <http://www.kryotherm.ru> (дата доступа 01.03.2024).
6. Пономаренко Г.Н., Турковский И.И. Биофизические основы физиотерапии. М.: Медицина, 2006. 176 с.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ОЦЕНКИ РИСКОВ

С.А. Ильясова
ДГТУ, Махачкала

Аннотация: данная статья посвящена математическим моделям и методам оценки рисков, рассмотрены их преимущества и недостатки. В частности, был проведён анализ этих моделей и методов оценок рисков на примере задач.

Ключевые слова: оценка рисков, методы оценки рисков, математическое моделирование, количественная оценка, качественная оценка, принятие решений, рисковое событие

Риск рассматривается как вероятностная категория. А оценка риска, в свою очередь - это все аналитические мероприятия, позволяющие спрогнозировать получение дополнительного предпринимательского дохода или какой-либо величины ущерба от наступившей рискованной ситуации и не вовремя принятые меры по предотвращению риска. Оценка риска актуальна в любое время, но особую значимость приобретает в современном мире. В связи с развитием инновационных технологий в любой сфере жизнедеятельности. Для предотвращения различных рисков, необходимо, в первую очередь, проанализировать и оценить уровень риска [1].

Чтобы оценить риски прибегают в основном к количественным и качественным методам оценки рисков. Количественные методы являются более трудоёмкими, но с помощью них можно определить несколько вариантов для того, чтобы принять какое-либо решение. А качественные методы могут дать целостную оценку вероятности наступления риска и ущерба.

Существуют следующие виды расчётных методов, которые относятся к количественным методам - это статистические, логико-вероятностные, аналитические методы и метод аналогий.

Чаще всего на практике используются статистические методы оценки рисков. Они определяют вероятность события и устанавливают величину риска. Плюсом данного метода является простота расчётов, а недостатком – наличие большого количества

достоверной и полной информации. Совсем недавно начали применять логико-вероятностные методы.

И последний метод - метод аналогий, используемый для оценки рисков, где часто повторяются события или объекты. Он основан на анализе баз данных об оценке рисков объектов-аналогов. Одним из важнейших критериев метода аналогий является сравнимость какой-либо информации аналогичного объекта с исследуемым.

Математическая модель – это представление какой-либо реальной ситуации с помощью математического языка. Математические модели, в свою очередь, относятся к аналитической группе количественных методов. Сфера математических моделей и методов заполонила экономическую науку очень быстро, но это можно назвать положительным результатом, потому что позволило более глубоко проводить исследования.

Общая модель описывается: $R = f(P, I)$, соответственно основная цель - это применение математического моделирования в оценке рисков, где P - обозначает вероятность наступления через какой-либо промежуток времени события риска. I - обозначает потенциальные последствия, на которые воздействуют факторы рисков.

Использование математических моделей можно свести к применению таких типов моделей, как детерминированные - математические модели, которые описывают поведение объекта, если существует полная определенность в настоящем и будущем времени. Например, это могут быть технологические процессы для обработки деталей или же какие-либо формулы законов физики.

Модель называется стохастической, если случайные величины находятся в модели, и определяются только некоторыми характеристиками вероятностей. В лингвистических моделях описывается неопределенность с помощью функции принадлежности, которую задают вербально, или же применяется нечеткая логика, которая в принципе не требует устойчивости в событиях. Игровые модели задают многие отдельные значения последствий рискованного события.

Анализ уместности затрат основан на предположение о том, что перерасход средств может быть вызван одним или несколькими факторами.

Не менее распространенным является метод аналогий. Суть его заключается в анализе всех имеющихся данных по не менее

рискованным аналогичным проектам, изучении последствий воздействия на них неблагоприятных факторов с целью определения потенциального риска при реализации нового проекта.

Методы экспертных оценок риска - это методы прогнозирования и анализа рисков, которые основаны на заключениях экспертов, имеющих опыт реализации инновационных проектов [3].

Одной из важных задач качественного метода является выявление и идентификация возможных рисков, и, конечно же, определение и описание какого-либо источника и фактора, которые влияют на определенный вид риска. Так же, описание причинённого ущерба, стоимостная оценка и меры по снижению риска тоже входит в качественный метод оценки рисков [2].

Результатом качественного анализа риска, конечно, служат информацией для количественного анализа. Можно сказать, что оцениваются только некоторые риски, присутствующие при воплощении какой-либо операции алгоритма.

Конечно же, методы количественной оценки, как и другие методы, имеют свои плюсы и минусы. Для того, чтобы в комплексе оценивать данные риски, нужен как качественный, так и количественный анализ. Можно сделать вывод, что очень важно управлять риском. Ведь данное управление риском означает правильное понимание степени риска, который постоянно угрожает людям, их имуществу, финансовым результатам деятельности. Особенно для предпринимателя самым важным является знание действительной стоимости риска, которому подвергается его хозяйственная деятельность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уродовских В.Н. Управление рисками предприятия: Учеб. пособие. - М.: ВЗФЭИ, 2009. - 130 с.
2. Слабинский С.В. Особенности оценки рисков в производственной деятельности промышленных предприятий [Электронный ресурс]. –Режим доступа: <http://science-bsea.narod.ru>.
3. Высочанская Е.Ю., Малышева Л.В. Гипотеза чистых ожиданий// Поволжский торгово-экономический журнал. 2014. N 4 (38). С. 60-64.

УСТАНОВЛЕНИЕ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ ФИЗИКИ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК С ЦЕЛЬЮ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТА

Р.К. Келбиханов, ДГТУ, ДГУНХ, Махачкала

Р.К. Джалалов, ДГУНХ, Махачкала

М.Г. Мухидинов, ДГУНХ, Махачкала

Аннотация: в статье рассматриваются основные проблемы межпредметных связей физики и технических наук приобщающие обучающихся к системному методу мышления и формированию научного мировоззрения. Предлагаются методы обучения, способствующие организации предметного обучения вносящие системный и последовательный характер.

Ключевые слова: межпредметные связи, физика, технические науки, мотивация, техническая механика, сопротивление материалов.

Актуальность формирования межпредметных умений обусловлена необходимостью внедрения в учебный процесс новых форм и технологий обучения, повышения квалификации сотрудников и профессорско-преподавательского состава высших учебных заведений. Также нужно отметить существенную роль межпредметных связей в повышении абстрактной и практической подготовки обучающихся.

Целью настоящей работы является изучение значимости принципа межпредметной связи в обучении физики и в частности технической механики в техническом вузе и определение методических приемов для его реализации.

Большинство конструкций промышленных и гражданских зданий, автомобилей, железных дорог имеют сложную конструкцию и состоят из множества элементов. В частности, на опоры моста влияет его собственный вес, а также и вес проходящего по нему транспортных средств, которые в процессе эксплуатации элементы конструкции подвергаются действию различных сил.

Поэтому есть необходимость в предварительном расчете на *прочность, жесткость и устойчивость* типовых элементов конструкций в начале проектирования соответствующего объекта,

что изучается в одном из разделов технической механики – сопротивление материалов.

Изучение дисциплин в учебных планах для технических специальностей, по которым ведется подготовка студентов порой разделено на большой временной период. Это приводит к тому, что студенты при изучении физики не знают элементарных прикладных аспектов, а при изучении технических дисциплин уже забывают о физических основах, рассматриваемых процессов, явлений, лежащих в основе работы технических устройств и свойств материалов.

Изучая физику, некоторые, студенты нередко не осознают важности физики в их профессиональной деятельности. Именно представления о связях между физикой и техническими науками, лежащими в основе профессиональной подготовки студентов по данной специальности, дадут ответ на этот вопрос.

Рассмотрим использование межпредметных связей на примере технической механики (в основном она состоит из трех разделов теоретической механики, сопротивления материалов и деталей машин) встречающейся в учебных планах специальностей, связанных с техническими науками и технологиями в сопоставлении с физикой в виде таблицы (таблица). Здесь мы рассмотрим два подраздела теоретической механики – кинематику и динамику, не касаясь первого подраздела статики.

Таблица – Сопоставление разделов (тем) дисциплин
Техническая механика и Физика

Наименование раздела (темы) дисциплины «Техническая механика»	Наименование раздела (темы) дисциплины «Физика»
Основные понятия и определения статики	
КИНЕМАТИКА 1. Основные понятия кинематики. Уравнение движения точки. Скорость точки. Ускорение точки. Виды движения точки в зависимости от ускорения. 2. Поступательное движение твердого тела. Вращательное	КИНЕМАТИКА 1.Основные понятия кинематики. Механическое движение, материальная точка. Равномерное движение. Равноускоренное движение 2. Поступательное движение твердого тела.

<p>движение твердого тела вокруг неподвижной оси. Скорости и ускорения вращающегося тела.</p>	<p>Перемещение, путь, скорость; мгновенное, нормальное, тангенциальное и полное ускорение при криволинейном движении. Движение по окружности. Угловая скорость, нормальное, тангенциальное и полное и ускорение</p>
<p>ДИНАМИКА 1. Аксиомы динамики. Сила инерции. Метод кинетостатики. 2. Работа постоянной силы на прямолинейном перемещении. Мощность. Работа и мощность при вращательном движении 3. Понятие о трении. Виды трения. роль трения в технике Коэффициент полезного действия 4. Закон изменения количества движения. Потенциальная и кинетическая энергия. Закон изменения кинетической энергии.</p>	<p>ДИНАМИКА 1. Закон всемирного тяготения. Движение тел под действием силы тяжести. 2. Механическая работа и мощность 3. Сила трения. Сила сухого трения, трение покоя, сила трения скольжения, коэффициент трения скольжения. Вес и невесомость. Сила тяжести. Сила нормального давления или сила реакции опоры. 4. Закон сохранения импульса. Кинетическая и потенциальная энергии. Закон сохранения механической энергии.</p>

Использование межпредметных связей физики и технических наук [1,2]. в процессе обучения может значительно повысить интерес ко многим изучаемым разделам физики, особенно, если для их более наглядного объяснения преподавателем [3] используются демонстрационные опыты и мультимедийные приложения к занятиям.

Межпредметные связи содействуют формированию обобщенных умений, развивают самостоятельность и творческую

активность, а также создают благоприятные условия для формирования у обучающихся естественно-научной картины мира.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джалалов Р.К., Кулибеков Н.А., Келбиханов Р.К. Установление межпредметных связей при изучении физики и информатики в колледже //Сборник статей Международной научно-практической конференции. ООО «Аэтерна». Уфа, 2017. С. 167-170.

2. Келбиханов Р.К., Джалалов Р.К., Гусейнов Р.М. Реализация межпредметных связей при преподавании физики и химии в колледже //Концепция “Общества знаний” в современной науке. Сборник статей Международной научно-практической конференции. ООО Омега сайенс. Уфа, 2018. С. 9-11.

3. Джалалов Р.К., Келбиханов Р.К., Кулибеков Н.А. Основные проблемы преемственности при обучении физике в системе школа-вуз //Академическая публицистика. 2022. №2-1. С.182-185.

УДК 519.213.2, 517.443, 517.518.45

МОМЕНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, МОМЕНТЫ СЕНАТОВА

А.Е. Кондратенко, В.Н. Соболев
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва

Аннотация: в статье обсуждается целесообразность включения в курсы теории вероятностей новых моментных характеристик случайных величин – моментов Сенатова.

Ключевые слова: моментные характеристики, моменты Сенатова, разложение плотности, асимптотические разложения.

Пусть $F(x), f(t)$ — функция распределения и характеристическая функция случайной величины ξ . Далеко не всегда распределение случайной величины полностью известно, однако для решения многих задач, включая центральную предельную теорему, достаточно обладать лишь определенной информацией, которую несут характеристики, называемыми моментами

$$\alpha_k = M\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x),$$

если соответствующий интеграл сходится абсолютно. Вообще говоря, моменты определены для любого действительного порядка, но в данном обсуждении ограничимся целыми неотрицательными значениями $k \in Z_+$. Важнейшим моментом является момент первого порядка, известный как математическое ожидание.

Если моменты существуют, то они связаны с характеристической функцией следующим образом:

$$i^k \alpha_k = (f(t))_{t=0}^{(k)}.$$

Помимо исходных моментных характеристик возникли и используются абсолютные моменты

$$\beta_k = M|\xi|^k,$$

которые, например, оценивают сверху модуль k -й производной характеристической функции.

С центральными моментами

$$M(\xi - M\xi)^k$$

связаны дисперсия, асимметрия и эксцесс, а с факториальными

$$M\xi(\xi - 1) \dots (\xi - k + 1)$$

левые производные производящей функции в 1.

Семиинварианты

$$i^k \kappa_k = (\ln f(t))_{t=0}^{(k)}$$

обладают важным для изучения поведения сверток свойством – семиинвариант свертки равен сумме семиинвариантов слагаемых. Для стандартной нормальной величины, характеристическая функция которой равна $e^{-t^2/2}$, семиинварианты равны нулю для порядков, начиная с третьего.

В 2001 году [1] профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова Владимир Васильевич Сенатов (1951–2021) окончательно определил характеристики, называемые после его смерти моментами Сенатова [2]

$$i^k \theta_k = (e^{t^2/2} f(t))_{t=0}^{(k)}.$$

В терминах этих характеристик предложено наиболее естественное разложение плотности, нормированной и центрированной случайной величины

$$p(x) \sim \varphi(x) + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\theta_k}{k!} H_k(x) \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = e^{-x^2/2} / \sqrt{2\pi}$ – стандартная нормальная плотность, а

$$H_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2} (e^{-x^2/2})^{(k)}$$

суть многочлены Чебышева – Эрмита, образующие ортогональную систему на \mathbb{R} с весом $\varphi(x)$.

Моменты Сенатова нормированной и центрированной свертки n одинаково распределенных случайных величин представляются через моменты слагаемого следующим образом:

$$\frac{\theta_k(F_n)}{k!} = \sum \frac{n!}{j_0! j_3! \dots j_n!} \left(\frac{\theta_3}{3! n^{\frac{3}{2}}} \right)^{j_3} \dots \left(\frac{\theta_k}{k! n^{\frac{k}{2}}} \right)^{j_k},$$

где суммирование производится по целым неотрицательным наборам

$$j_0 + j_3 + j_4 + \dots + j_k = n, \quad 3j_3 + 4j_4 + \dots + kj_k = k.$$

Из этого представления следует стремление к нулю моментов Сенатова таких свертки с ростом числа слагаемых для всех порядков, начиная с третьего, а разложение для плотности n -кратной свертки

$$p_n(x) \sim \varphi(x) + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\theta_k(F_n)}{k!} H_k(x) \varphi(x)$$

будет асимптотическим. Работа с такими разложениями в центральной предельной теореме при известных $m + 2$ начальных моментах позволила получать явные оценки точности порядка $n^{-m/2}$, которые можно доводить до численных значений [3].

Стоит отметить выражение моментов Сенатова через обычные моменты и наоборот.

$$\theta_k = H_k(\vec{\alpha}_k).$$

Под такой записью мы понимаем замену в многочлене Чебышева – Эрмита всех степеней x на моменты соответствующих порядков. Например, $H_3(x) = x^3 - 3x$, $\theta_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1$.

$$\alpha_k = \bar{H}_k(\vec{\theta}_k),$$

где сопряженные многочлены Чебышева – Эрмита $\bar{H}_k(x)$ получаются из обычных заменой всех отрицательных коэффициентов на равные по модулю положительные. Например, $\bar{H}_3(x) = x^3 + 3x$, $\alpha_3 = \theta_3 + 3\theta_1$.

Предложенный В.В. Сенатовым метод качественно продвинул исследования, связанные с центральной предельной теоремой. Так как основную роль при этом играют моменты Сенатова, их

включение в курс теории вероятностей кажется, по мнению авторов [4], целесообразным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сенатов В.В. Применение моментов Чебышева – Эрмита в асимптотических разложениях, в ст.: “XX международный семинар по проблемам устойчивости стохастических моделей” // Теория вероятностей и ее применения, 46:1 (2001), 190–193, Senatov V.V. Application of the Chebyshev – Hermite moments in asymptotic decompositions, in “Twentieth international seminar on stability problems for stochastic models” // Theory of Probability and its Applications, 46:1 (2002), 179–181.

2. Соболев В.Н., Кондратенко А.Е. О моментах Сенатова в асимптотических разложениях в центральной предельной теореме // Теория вероятностей и ее применения, 67:1 (2022), 193–198, Sobolev V.N., Kondratenko A.E., “On Senatov Moments in Asymptotic Expansions in the Central Limit Theorem” // Theory of Probability and its Applications, 67:1 (2022), 154-157

3. Сенатов В.В. Центральная предельная теорема: точность аппроксимации и асимптотические разложения, М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2009, 352 с.

4. Кондратенко А.Е., Соболев В.Н. Семиинварианты, моменты Сенатова и разложение плотности // Computational mathematics and information technologies. — 2023. — Т. 7, № 3. — С. 7–11.

УДК 004.8

НАДЕЖНОСТЬ И КАЧЕСТВО ТЕСТИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

**А.П. Кондратюк
БрГУ, Брест, Беларусь**

Аннотация: в статье рассмотрены проблемы, связанные с надежностью и качеством использования искусственного интеллекта в тестировании программного обеспечения.

Ключевые слова: искусственный интеллект, тестирование программного обеспечения, надежность тестирования, качество тестирования.

Использование искусственного интеллекта при тестировании программного обеспечения становится все более важным, поскольку компании стремятся сократить время и усилия, необходимые для тестирования и развертывания. Автоматизируя повторяющиеся задачи тестирования, компании могут ускорить циклы выпуска и улучшить общее качество своего программного обеспечения. Кроме того, инструменты тестирования на базе искусственного интеллекта могут помочь предприятиям выявлять и устранять дефекты в программном обеспечении до того, как они станут серьезными проблемами [1].

Однако на практике могут возникать вопросы, связанные с надежностью и качеством. Разработчики систем искусственного интеллекта могут сделать систему заслуживающей доверия, определив поддающиеся проверке требования к качеству с учетом юридических, этических и социальных проблем. Инженеры, будь то разработчики или тестировщики, могут построить надежную систему, реализуя и проверяя требования.

Существуют следующие проблемы, связанные с качеством искусственного интеллекта.

Проблема 1. Автоматизация без спецификации. Первая проблема заключается в том, что машинное обучение, наиболее распространенный подход к искусственному интеллекту, также можно определить, как автоматизацию с небольшой спецификацией или вообще без нее. Вместо указания логики, описывающей работу системы, она обучается на наборах данных.

Задача 2. Неизвестные ответы. Вторая проблема в том, что если мы не знаем ответа на конкретную задачу и специально пишем систему для выяснения ответа, которого не знаем, то как мы узнаем, правильный ли он?

Проблема 3. Сложность данных. Третья проблема — сложность входных данных. Предположим, что система имеет большой набор реальных датчиков, как мы можем предсказать все диапазоны входных данных?

Проблема 4. Сложность системы. Системы искусственного интеллекта могут быть очень сложными. Возьмем, к примеру, систему глубокого обучения. Она может состоять из множества слоев нейронных сетей, каждый из которых создан на основе обучающих данных. Их внутренняя структура очень сложна, но, что особенно

важно, она не представляет функциональность так, чтобы ее мог понять человек.

Проблема 5. Самооптимизация. Это понимание того, как система оптимизирует себя. Как тестирование системы изменит ее? Как понять, что изменилось? Качество становится чем-то, что развивается по мере адаптации системы.

Проблема 6. Способности человека. Если система предназначена для имитации человеческих способностей, то практически невозможно составить полный список всех человеческих способностей.

Проблема 7. Предвзятость. Одна из самых больших проблем, с которыми сталкивается ИИ, заключается в том, что системы обычно учатся на знаниях, предоставляемых людьми, и в этих данных или даже в требованиях обычно присутствует предвзятость.

Проблема 8. Дрифт. Эта проблема заключается в том, что реальный мир постоянно меняется. Она называется дрейфом понятий, когда корреляция между входными и выходными данными меняется со временем в реальном мире. Некоторые системы подстраиваются под это, а некоторые нет.

Проблема 9. Предвзятость автоматизации. Последняя проблема — это другой вид предвзятости, называемый предвзятостью автоматизации. Возникает в том случае, если системе искусственного интеллекта будут доверять слишком сильно, что ухудшит качество решений, принимаемых людьми [2].

Качество, конечно, не может быть измерено с помощью одного показателя. Это требует определения характеристик и терминологии, которые можно использовать при определении требований к качеству и их оценке. Можно сказать, что существует ряд аспектов качества, которые применимы исключительно к системам искусственного интеллекта. Терминология и модели все еще развиваются, и давление со стороны регулирующих органов, вероятно, заставит в ближайшие годы уделять больше внимания искусственному интеллекту и качеству.

ЛИТЕРАТУРА

1. AI in Software Testing | Why it is Important In Software Test Automation [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://testsigma.com/blog/is-ai-really-important-in-software-test-automation/> – Дата доступа: 18.03.2024.

УДК 517.956.35

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО НЕСТРОГОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

В.И. Корзюк, Я.В. Рудько
Институт математики НАН Беларуси, Минск

Аннотация: в докладе установлена теорема существования и единственности классического решения задачи Коши для одного полулинейного нестроого гиперболического уравнения третьего порядка с двумя характеристиками.

Ключевые слова: классическое решение, задача Коши, полулинейное уравнение, метод характеристик, нестроого гиперболическое уравнение.

Постановка задачи. В области $Q = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ двух независимых переменных t и x рассмотрим нелинейное уравнение третьего порядка

$$(\partial_t - a_1 \partial_x + b_1)(\partial_t - a_2 \partial_x + b_2)^2 u(t, x) = f(t, x, u(t, x)), \quad (1)$$

где $\partial_t = \partial/\partial t$ и $\partial_x = \partial/\partial x$ – частные производные первого порядка по t и x соответственно, a_1, a_2, b_1 и b_2 – заданные действительные числа, такие что $a_1 \neq a_2$ и $b_1 \neq b_2$, f – функция, заданная на множестве $\bar{Q} \times \mathbb{R}$, где \bar{Q} – замыкание области Q ; т. е. $\bar{Q} = [0, \infty) \times \mathbb{R}$. На границе ∂Q области Q задаются условия Коши

$$u(0, x) = \varphi_0(x), \partial_t u(0, x) = \varphi_1(x), \partial_t^2 u(0, x) = \varphi_2(x), x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

где φ_0, φ_1 и φ_2 – функции, заданные на множестве \mathbb{R} , и ∂_t^j означает производную $\partial_t^j = \partial^j/\partial t^j$.

Случай $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$ мы рассмотрели ранее в препринте [1]. Также следует отметить, что похожие задачи были рассмотрены ранее как для нелинейных уравнений [2], так и для линейных [3–5].

Интегральное уравнение. Оказывается, что если выполнены условия гладкости $\varphi_0 \in C^4(\mathbb{R})$, $\varphi_1 \in C^3(\mathbb{R})$, $\varphi_2 \in C^2(\mathbb{R})$ и $f \in C^2(\bar{Q})$, то

любое решение $u \in C^3(\bar{Q})$ задачи Коши (1), (2) является непрерывным решением следующего интегрального уравнения, и наоборот:

$$\begin{aligned}
 u(t, x) = & t \exp(-b_2 t) (b_1 \varphi_0(x + a_2 t) + \varphi_1(x + a_2 t) - a_1 D \varphi_0(x + a_2 t)) + \\
 & + \exp(-b_2 t) \int_0^{x+a_2 t} \frac{\exp\left(\frac{(x-z+a_2 t)(b_1-b_2)}{a_1-a_2}\right) (x-z+a_2 t) \Phi(z)}{(a_1-a_2)^2} dz - \\
 & - \exp(-b_1 t) \int_0^{x+a_1 t} \frac{\exp\left(\frac{(x-z+a_1 t)(b_1-b_2)}{a_1-a_2}\right) (x-z+a_1 t) \Phi(z)}{(a_1-a_2)^2} dz + \\
 & + t \exp(-b_2 t) \int_0^{x+a_2 t} \frac{\exp\left(\frac{(x-z+a_2 t)(b_1-b_2)}{a_1-a_2}\right) \Phi(z)}{a_1-a_2} dz + \\
 & + \int_0^t \left\{ \exp(-b_1(t-\tau)) \int_0^{x+a_1(t-\tau)} \frac{\exp\left(\frac{(x-z+a_1(t-\tau))(b_1-b_2)}{a_1-a_2}\right)}{(a_1-a_2)^2} \times \right. \\
 & \times (x-z+a_1(t-\tau)) f(\tau, z, u(\tau, z)) dz - \exp(-b_2(t-\tau)) \times \\
 & \times \left[(t-\tau) \int_0^{x+a_2(t-\tau)} \frac{\exp\left(\frac{(x-z+a_2(t-\tau))(b_1-b_2)}{a_1-a_2}\right)}{a_1-a_2} \times \right. \\
 & \times f(\tau, z, u(\tau, z)) dz + \int_0^{x+a_2(t-\tau)} \frac{\exp\left(\frac{(x-z+a_2(t-\tau))(b_1-b_2)}{a_1-a_2}\right)}{a_1-a_2} \times \\
 & \times (x-z+a_2(t-\tau)) f(\tau, z, u(\tau, z)) dz \left. \right\} d\tau + \exp(-b_1 t) \varphi_0(x + a_1 t) + \\
 & (t, x) \in \bar{Q}, \tag{3}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Phi(z) = & b_1^2 \varphi_0(z) - 2b_1 b_2 \varphi_0(z) - 2b_2 \varphi_1(z) - \varphi_2(z) - 2a_1 b_1 D \varphi_0(z) + \\
 & + 2a_2 b_1 D \varphi_0(z) + 2a_1 b_2 D \varphi_0(z) + 2a_2 D \varphi_1(z) + a_1^2 D^2 \varphi_0(z) - \\
 & - 2a_1 a_2 D^2 \varphi_0(z),
 \end{aligned}$$

и D^j – оператор обыкновенной производной порядка j и, для краткости, $D^1 = D$.

При дополнительном условии

$$|f(t, x, u_1) - f(t, x, u_2)| \leq k(t, x) |u_1 - u_2|,$$

где k – функция класса $C(\bar{Q})$, используя метод продолжения по параметру [6, 7] или принцип Лере–Шаудера [8], можно доказать разрешимость уравнения (3) в классе $C(\bar{Q})$. Единственность следует либо по построению, если был применен метод продолжения по параметру, или доказывается от противного с использованием обобщения леммы Гронуолла [9]. Непрерывная зависимость решения от начальных данных также следует либо по построению, если был применен метод продолжения по параметру, или обосновывается с помощью обобщения леммы Гронуолла.

Классическое решение. Результат доклада сформулируем в виде теоремы.

Теорема. Пусть выполняются условия гладкости $\varphi_0 \in C^4(\mathbb{R})$, $\varphi_1 \in C^3(\mathbb{R})$, $\varphi_2 \in C^2(\mathbb{R})$ и $f \in C^2(\bar{Q})$ и функция f удовлетворяет условию Липшица по третьей переменной с функцией $k \in C(\bar{Q})$, т. е.

$$|f(t, x, u_1) - f(t, x, u_2)| \leq k(t, x)|u_1 - u_2|.$$

Тогда задача Коши (1), (2) имеет в классе $C^3(\bar{Q})$. Это решение определяется формулой (3) и может быть найдено методом последовательных приближений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Korzyuk V.I., Rudzko J.V. Cauchy Problem for a Semilinear Nonstrictly Hyperbolic Equation on a Half-Plane in the Case of a Single Characteristic. Berlin, 2023, 15 p. (Preprint / ResearchGate GmbH.).

2. Корзюк В.И., Рудько Я.В. Классическое решение задачи Коши для полуполинейного гиперболического уравнения в случае двух независимых переменных // Известия вузов. Математика, 2024, № 3, с. 50–63.

3. Korzyuk V.I., Kozlovskaya I.S. Solution of the Cauchy Problem for a Hyperbolic Equation with Constant Coefficients in the Case of Two Independent Variables // Differential Equations, 2012, Vol. 48, № 5, pp. 707–716.

4. Korzyuk V.I., Kozlovskaya I.S., Kozlov A.I. Cauchy Problem for a Nonstrictly Hyperbolic Equation on a Half-Plane with Constant Coefficients // Differential Equations, 2015, Vol. 51, № 6, pp. 726–737.

5. Korzyuk V.I., Kazlouskaya I.S., Kozlov A.I. Cauchy Problem in Half-Plane for Hyperbolic Equation with Constant Coefficients // Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE 2012, Cambridge: Cambridge Scientific Publishers Ltd., pp. 45–71.

6. Trenogin V.A. Invertibility of Nonlinear Operators and Parameter Continuation Method // Spectral and Scattering Theory, Boston: Springer, 1998, pp. 189–197.

7. Треногин В.А. Глобальная обратимость нелинейных операторов и метод продолжения по параметру // Докл. РАН, 1996, Т. 350, № 4, С. 455–457.

8. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2002. 488 с.

9. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978, 688 с.

УДК 534.11

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ БАЛКИ С ПОДВИЖНОЙ ПОДПРУЖИНЕННОЙ ОПОРОЙ

**В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва**

Аннотация: получена постановка задачи о колебаниях балки с подвижной подпружиненной опорой, несущей прикрепленную массу. В случае, когда опора не является абсолютно жесткой, обмен энергией происходит через подвижную границу. В связи с этим возникает трудность в написании граничных условий. Для формулировки задачи использован вариационный принцип Гамильтона. При этом учитываются вязкоупругие свойства материала балки. Поставленная задача включает дифференциальное уравнение колебаний, начальные условия для изогнутой оси балки и присоединенной массы, граничные условия. Условия на подвижной границе записываются как отношения значений функции и ее производных слева и справа от границы.

Ключевые слова: колебания балки с подвижной пружинной опорой, граничные условия, вариационные принципы.

Среди всех многочисленных проблем динамики упругих систем с точки зрения технических приложений выделяются проблемы колебаний в системах с подвижными границами: продольно-поперечные колебания канатов грузоподъемных установок [9], гибких звеньев передач [1, 5, 6], стержней твердого топлива и балок

переменной длины [2, 4, 10, 11], бурильных колонн [8], железнодорожной контактной сети [3, 7, 12, 14], ленточных конвейеров [1] и т. д.

В математической постановке это сводится к новым задачам математической физики — к исследованию соответствующих уравнений гиперболического типа в переменных диапазонах изменения обоих аргументов [14].

До сих пор не существует общего подхода к постановке таких задач, и авторы в каждом конкретном случае адаптируют существующие методы для решения рассматриваемой задачи [1–9]. Здесь отметим, что методы решения этих уравнений в переменных геометрических областях качественно отличаются от классических методов математической физики. Другими словами, изучаемый динамический процесс развивается во времени.

Проблемы колебаний систем с подвижными границами решены в основном при линейной постановке и жесткой фиксации границ, когда обмен энергией через границу отсутствует [1-14]. В редких случаях учитывалось влияние демпфирующих сил. Реальные технические объекты гораздо сложнее.

Задачи о колебаниях балки с подвижной опорой относятся к широкому классу задач, связанных с колебаниями объектов с подвижными границами. Во всех рассмотренных ранее случаях жесткое крепление подвижной опоры исключало обмен энергией через нее. При наличии энергообмена возрастает сложность регистрации условий на движущейся границе. В данной работе для постановки задачи предлагается использовать вариационный принцип Гамильтона.

В связи с интенсивным развитием численных методов появилась возможность более точно описывать такие объекты с учетом большого количества факторов.

Сформулирована новая нелинейная математическая модель поперечных колебаний вязкоупругой балки с подвижной подпружиненной опорой, несущей прикрепленную массу. Граничные условия получены при взаимодействии частей объекта слева и справа от движущейся границы с учетом обмена энергией через нее. Полученная математическая модель позволяет описывать высокоинтенсивные колебания систем с подвижными границами.

Заметим, что в настоящее время не существует методов аналитического решения поставленной задачи, поэтому данная задача может быть решена только численными методами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Boyle, John M. (Jr). Vibration modeling of magnetic tape with vibro–impact of tape–guide contact / Boyle, John M. (Jr), Bhushan Bharat // J. Sound and Vibr. № 3. – 2006. –P. 632–655.

2. Brake M.R. Frictional vibration transmission from a laterally moving surface to a traveling beam / Brake M. R., Wickert J. A. // J. Sound and Vibr. № 3. – 2008. –P. 663–675.

3. Cho, Yong Hyeon. Numerical simulation of the dynamic responses of railway overhead contact lines to a moving pantograph, considering a nonlinear dropper / Cho Yong Hyeon // J. Sound and Vibr. № 3. – 2008. – P.433–454.

4. Ding, Hu. Galerkin methods for natural frequencies of high–speed axially moving beams / Ding Hu, Chen Li–Qun // J. Sound and Vibr. № 17. – 2010. –P. 3484–3494.

5. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Исследование резонансных свойств механических объектов с подвижными границами методом Канторовича–Галеркина // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико-математические науки», 2009, 1 (18), 149–158.

6. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Математические модели продольно-поперечных колебаний объектов с подвижными границами // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико-математические науки», 2015, 2 (19), 382–397.

7. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Применение метода Канторовича – Галеркина для решения краевых задач с условиями на подвижных границах // Известия РАН. Механика твердого тела. 2018. № 2. С. 70–77.

8. S.H. Sandilo, W.T. van Horssen. On variable length induced vibrations of a vertical string // Journal of Sound and Vibration, 333, 2014. P. 2432–2449.

9. Liu Z., Chen G. Analysis of Plane Nonlinear Free Vibrations of a Carrying Rope Taking into Account the Influence of Flexural Rigidity // J. Vibr. Eng. 2007. No. 1. P. 57–60.

10. W. Zhang, Y. Tang. Global dynamics of the cable under combined parametrical and external excitations // International Journal of Non-Linear Mechanics, 37, 2002. P. 505–526.

11. Литвинов В.Л., Яшагин Н.С., Анисимов В.Н. Свидетельство о регистрации электронного ресурса «Автоматизированный исследовательский комплекс «ТБ – АНАЛИЗ» в ОФЭРНИО № 19517 от 26 сентября 2022 г. и ФГАНУ ЦИТиС № 130912114653 от 30 сентября 2022 г.

12. Литвинов В.Л. Решение краевых задач с подвижными границами с использованием приближенного метода построения решений интегро-дифференциальных уравнений // Тр. Институт математики и механики Уральского отделения РАН. 2020. Том. 26, №. 2. С. 188–199.

13. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении // Известия Самарского научного центра РАН. 2017. Том. 19. №. 4. – С. 161–165.

14. Литвинов В.Л., Литвинова К.В. Приближенный метод решения краевых задач с подвижными границами путем сведения к интегро-дифференциальным уравнениям// Вычислительная математика и математическая физика, 2022, т. 2, № 1, стр. 945–954.

УДК 519.6 + 517.983.54

МЕТОД ИТЕРАЦИЙ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

**О.В. Матысик
БрГУ, Брест, Беларусь**

Аннотация: в гильбертовом пространстве для решения операторных уравнений первого рода с неограниченным линейным и самосопряженным оператором предлагается неявный итерационный метод. Для предложенного метода доказана сходимость в энергетической норме гильбертова пространства, получены априорные оценки погрешности. Использование энергетической нормы позволяет сделать метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения уравнения.

Ключевые слова: гильбертово пространство, неявный итерационный метод, некорректное уравнение, энергетическая норма.

Будем рассматривать в гильбертовом пространстве H операторное уравнение

$$Ax = y \quad (1)$$

с неограниченным линейным и самосопряженным оператором A , для которого нуль принадлежит спектру оператора A , но не является его собственным значением. При сделанных предположениях задача о разрешимости уравнения (1) является некорректной. Если точное решение уравнения (1) все же существует, то для его отыскания естественно пытаться применить различные итерационные схемы [1–5].

В настоящей статье предлагается неявный итерационный метод

$$(A^4 + B)x_{n+1} = Bx_n + A^3 y, \quad x_0 = 0. \quad (2)$$

Здесь B – ограниченный вспомогательный положительный и самосопряженный оператор, который выбирается для улучшения обусловленности. В качестве B возьмем оператор $B = bE, b > 0$, E – тождественный оператор. Обычно правая часть уравнения (1) известна с некоторой точностью δ , т.е. известен y_δ , для которого $\|y - y_\delta\| \leq \delta$. Поэтому вместо (2) приходится рассматривать приближения

$$(A^4 + B)x_{n+1,\delta} = Bx_{n,\delta} + A^3 y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \quad (3)$$

Сходимость методов (2) и (3) в исходной норме пространства H была изучена в работе [4]. Там показано, что метод (3) сходится при условии $b > 0$, если число итераций n выбирать в зависимости от уровня погрешности δ так, чтобы $n^{\frac{1}{4}}\delta \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$. В предположении, что точное решение уравнения (1) истокообразно представимо

($x = A^s z, s > 0$), в [4] получены априорные оценки погрешности метода и априорный момент останова. В случае, когда нет сведений об истокообразности точного решения, затруднительно получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова. И тем не менее, метод (3) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться энергетической нормой гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$ (см. [4–5]).

Покажем сходимость метода (3) в энергетической норме и получим для него априорные оценки погрешности в энергетической норме гильбертова пространства. Рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}). \quad (4)$$

Запишем первое слагаемое из (4) в виде $x - x_n = A^{-1}B^n(A^4 + B)^{-n}y = B^n(A^4 + B)^{-n}x$.

Как было показано в [4–5] $x - x_n$ бесконечно мало в исходной норме гильбертова пространства H при $n \rightarrow \infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для ее оценки требовалось дополнительное предположение об истокообразной представимости точного решения. При использовании энергетической нормы нам это предположение не понадобится. Действительно, с помощью интегрального

представления самосопряженного оператора $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda$, где E_λ – соответствующая спектральная функция, имеем

$$\|x - x_n\|_A^2 = (AB^n(A^4 + B)^{-n}x, B^n(A^4 + B)^{-n}x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \left(\frac{b}{\lambda^4 + b} \right)^{2n} d(E_\lambda x, x).$$

Для оценки интересующей нас нормы найдем максимум подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda \left(\frac{b}{\lambda^4 + b} \right)^{2n}$ при $\lambda \in (-\infty; +\infty)$. Функция $f(\lambda)$ – частный случай при $2s = 1$ функций, оцененных в [4]. Там

показано, что при условии $b > 0$ $\max_{\lambda \in (-\infty; +\infty)} f(x) \leq \left(\frac{b}{16n} \right)^{\frac{1}{4}}$. Следовательно,

справедлива оценка $\|x - x_n\|_A^2 \leq \left(\frac{b}{16n} \right)^{\frac{1}{4}} \|x\|^2$. Отсюда $\|x - x_n\|_A \leq \left(\frac{b}{16n} \right)^{\frac{1}{8}} \|x\|$.

Таким образом, переход к энергетической норме как бы заменяет предположение об истокопредставимости порядка $2s = \frac{1}{2}$ для точного решения.

Оценим второе слагаемое в (4). Как показано в [4], справедливо равенство $x_n - x_{n,\delta} = A^{-1} \left[E - B^n(A^4 + B)^{-n} \right] (y - y_\delta)$. Получим

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{-1} \left[1 - \frac{b^n}{(\lambda^4 + b)^n} \right]^2 d(E_\lambda(y - y_\delta), y - y_\delta).$$

Обозначим через $g(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - \frac{b^n}{(\lambda^4 + b)^n} \right]^2$ подынтегральную

функцию, а через $g_1(x) = \lambda^{-1} \left[1 - \frac{b^n}{(\lambda^4 + b)^n} \right]$, тогда

$g(\lambda) = g_1(\lambda) \left[1 - \frac{b^n}{(\lambda^4 + b)^n} \right]$. Функция $g_1(\lambda)$ была оценена в [4], где

показано, что при условии $b > 0$ $g_1(\lambda) \leq 4 \left(\frac{n}{b} \right)^{\frac{1}{4}}$. При $b > 0$ имеем

$\frac{b}{\lambda^4 + b} \leq 1$ для $\forall \lambda \in (-\infty; +\infty)$, поэтому $1 - \frac{b^n}{(\lambda^4 + b)^n} \leq 1$. Отсюда

$g(\lambda) \leq 4 \left(\frac{n}{b} \right)^{\frac{1}{4}}$. Таким образом, $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 \leq 4 \left(\frac{n}{b} \right)^{\frac{1}{4}} \delta^2$, следовательно,

$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq 2 \left(\frac{n}{b} \right)^{\frac{1}{8}} \delta$, $n \geq 1$. Поскольку

$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq \|x - x_n\|_A + \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq \|x - x_n\|_A + 2 \left(\frac{n}{b} \right)^{\frac{1}{8}} \delta$ и $\|x - x_n\|_A \rightarrow 0$,

$n \rightarrow \infty$, то для сходимости $\|x - x_{n,\delta}\|_A \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ достаточно, чтобы

$\frac{1}{n^{\frac{1}{8}}} \delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$.

Итак, доказана

Теорема 1. При условии $b > 0$ итерационный метод (3) сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций n выбирать из условия $\frac{1}{n^{\frac{1}{8}}} \delta \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (3) в энергетической норме

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq \left(\frac{b}{16n} \right)^{\frac{1}{8}} \|x\| + 2 \left(\frac{n}{b} \right)^{\frac{1}{8}} \delta. \quad (5)$$

Оптимизируем оценку (5) по n . Для этого при заданном δ найдем такое значение числа итераций n , при котором оценка

погрешности становится минимальной. Приравняв нулю производную по n от правой части неравенства (5), получим

$$n_{\text{опт}} = b 2^{\frac{7}{2}} 2^{-\frac{5}{2}} \|x\|^4 \delta^{-4}. \quad (6)$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (5), найдем ее оптимальное значение

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \leq 2^{\frac{5}{4}} \delta^{\frac{1}{2}} \|x\|^{\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. Оптимальная оценка погрешности для метода (3) при условии $b > 0$ в энергетической норме имеет вид (7) и получается при $n_{\text{опт}}$ из (6).

Замечание. Оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра b . Но $n_{\text{опт}}$ зависит от b и, поскольку $b > 0$, то за счет его выбора можно получить $n_{\text{опт}} = 1$, т.е. оптимальная оценка погрешности будет достигаться уже на первом шаге итераций. Для этого достаточно взять $b_{\text{опт}} = 2^{\frac{7}{2}} k^2 \|x\|^{-4} \delta^4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962, 92 с.
2. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах. М: Наука, 1986, 178 с.
3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Едиториал УРСС, 2004, 480 с.
4. Матысик О.В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач. Брест: Брест. гос. ун-т, 2014, 213 с.
5. Matysik O.V., Van Hulle M.M. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier), 416 (2022), P. 1–12.

ИНТЕГРАЦИЯ CHAT GPT С ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМОЙ УЧЕТА ПРОДАЖ НА ОСНОВЕ МИКРОСЕРВИСА FASTAPI

**О.М. Минаев, ЧГУ, Грозный
А.В. Разваров, ВИБТ, Воронеж**

Аннотация: с учетом преимуществ использования систем искусственного интеллекта в бизнесе, в статье предлагается способ интеграции чат-бота Chat GPT с информационной системой учета продаж с использованием микросервиса Python FastAPI.

Ключевые слова: информационная система, искусственный интеллект, чат-бот, Chat GPT, микросервис.

С учетом быстрого развития систем искусственного интеллекта (ИИ) использование всех возможностей, предоставляемых данными системами, в бизнесе, предоставляют значительные конкурентные преимущества компаниям.

Системы искусственного интеллекта, в частности получивший в последнее время распространение чат-бот Chat GPT, могут быть внедрены в используемые в компаниях информационные системы (ИС) для автоматизации различных бизнес-процессов [3].

Интеграция элементов систем искусственного интеллекта в информационные системы учета продаж дают возможность выполнить автоматизацию и оптимизацию различных-бизнес-процессов в торговой компании. С их помощью можно ускорить обработку заказов, провести детальный анализ данных о клиентах и продажах, прогнозировать спрос на товары, что позволяет руководящему звену компании принимать обоснованные решения [1].

Системы искусственного интеллекта, интегрированные в АИС компании, дают возможность менеджерам по продажам формировать персонализированные предложения для клиентов с учетом их предыдущих покупок и предпочтений. В этом плане использование в деятельности менеджеров по продажам чат-бота Chat GPT повышает эффективность их деятельности, так как Chat GPT позволяет значительно ускорить анализ и обработку текстовой информации, с которой приходится работать сотрудникам компании (электронные

письма, отзывы и чаты с клиентами).

Функционирование чат-бота Chat GPT осуществляется с помощью алгоритмов обработки естественного языка (NLP). При взаимодействии с пользователем чат-бот использует предварительно заданный набор правил. Чат-бот упрощает и ускоряет процесс обслуживания клиентов, позволяет владельцу бизнеса эффективно взаимодействовать с аудиторией [2].

Таким образом, чат-бот Chat GPT упрощает и ускоряет процесс обслуживания клиентов, может анализировать данные о взаимодействии с клиентами, и на основе проведенного анализа предоставлять менеджеру ценную информацию, способствующую принятию наиболее обоснованных решений в процессе продаж.

В качестве примера интеграция Chat GPT с информационной системой учета продаж с использованием микросервиса FastAPI была использована ИС 1С: Предприятие 8.3, конфигурация «Управление торговлей», как наиболее распространенная информационная система в сфере продаж в России.

Для решения задачи интеграции Chat GPT с 1С: Управление торговлей требуется сервис для отправки запросов к чат-боту. С этой целью используется фреймворк FastAPI на языке программирования Python, который является одним из самых известных фреймворков Python для разработки сервисов REST. Использование FastAPI для создания микросервиса, как одного из компонентов интеграции Chat GPT с информационной системой учета продаж, продиктовано скоростью и простотой разработки сервисов с помощью FastAPI, легкостью развертывания проекта, преимуществами асинхронной обработки запросов, что способствует значительному сокращению времени выполнения запросов, обеспечивая более комфортную работу пользователей [5]. Взаимодействие 1С: Управление торговлей и Chat GPT выполняется с помощью обработки в системе 1С, основной функцией которой является отправка запросов и получение ответов от чат-бота через микросервис REST.

Схема взаимодействия фреймворка FastAPI с Chat GPT и информационной системой автоматизации учета продаж приведена на рисунке 1.

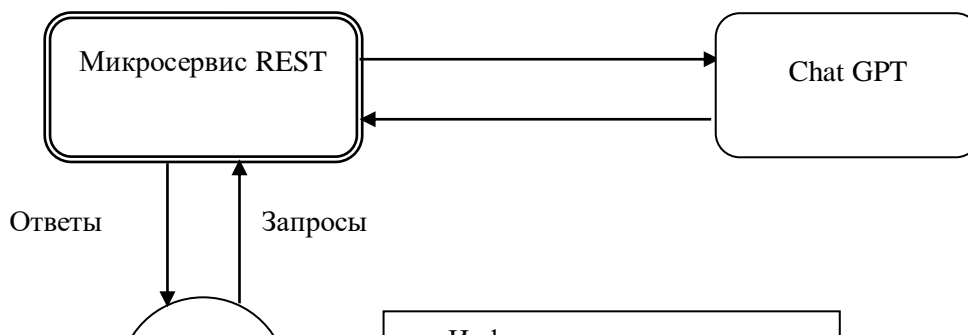


Рис. 1 – Схема взаимодействия фреймворка FastAPI, Chat GPT и ИС автоматизации учета продаж

Для разработки микросервиса требуется установить следующие библиотеки Python:

1. OpenAI. Библиотека OpenAI API позволяет интегрировать функции обработки естественного языка NLP в собственные приложения, а также разрабатывать генеративные текстовые модели.

2. FastAPI. Библиотека для работы с HTTP-запросами, которая необходима для отправки запросов к чат-боту.

3. Uvicorn. Библиотека для запуска асинхронного web-сервера [4].

Обработка в ИС 1С: Управление торговлей включает форму, содержащую несколько текстовых реквизитов (вопрос, результат, роль). Процесс создания и отправки запроса в данной обработке проходит через несколько этапов:

1. Создание данных для тела запроса с помощью заполнения новой структуры в 1С.

2. Преобразование заполненной структуры на предыдущем этапе в стандартный формат передачи данных JSON.

3. Отправка запроса через HTTP-соединение.

4. Получение результата запроса и вывод его на форму.

На рисунке 2 представлено окно формы обработки взаимодействия 1С: Управление торговлей с чат-ботом Chat GPT через микросервис FastAPI с размещенными на форме текстовыми реквизитами.

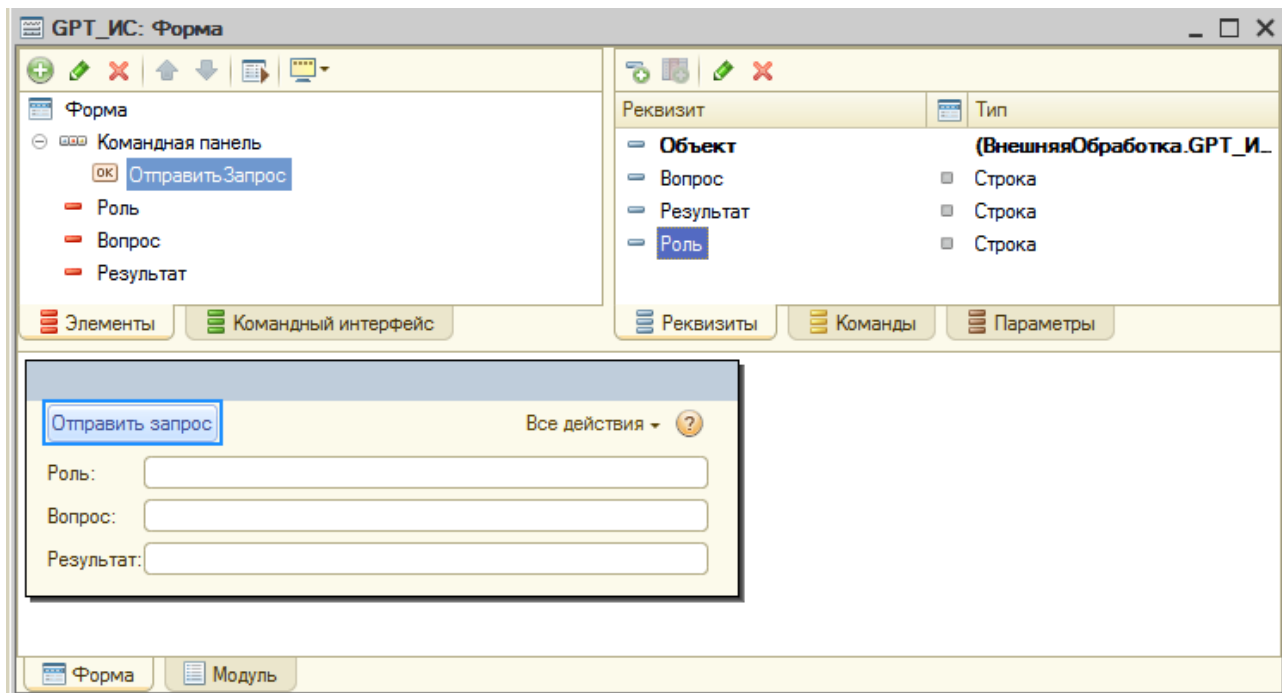


Рис. 2 – Окно формы обработки взаимодействия ИС 1С: Управление торговлей с Chat GPT через микросервис FastAPI

Выбор необходимой роли и ввод вопроса в поле на форме инициирует отправку сформированного запроса через HTTP-соединение микросервиса FastAPI к чат-боту и получение ответа.

Таким образом, интеграция Chat GPT с информационной системой учета продаж 1С: Управление торговлей с помощью микросервиса FastAPI позволит ускорить процесс обслуживания клиентов путем предоставления необходимой информации по товарам, клиентам и заказам, что будет способствовать повышению эффективности деятельности менеджеров по продажам торговой компании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вендров А.М. Проектирование программного обеспечения экономических информационных систем. – М.: Финансы и статистика, 2020. – 544 с.
2. Радченко М.Г., Хрусталева Е.Ю. 1С: Предприятие 8.3. Практическое пособие разработчика. Примеры и типовые приемы. 3-е изд. - М.: Издательство 1С-Публишинг, 2023. - 982 с.
3. Хрусталева Е.Ю. Технологии интеграции "1С.Предприятия 8.3". - М.: Издательство 1С-Публишинг, 2023. - 502 с.
4. Хрусталева Е.Ю. Система взаимодействия. Коммуникации в бизнес-приложениях. Разработка в системе "1С: Предприятие 8.3". - М.: Издательство 1С-Публишинг, 2019. - 129 с.

5. Чернышев С.А. Принципы, паттерны и методологии разработки программного обеспечения. – М.: Юрайт, 2022. – 177 с.

УДК 004.42

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ УЧЕТА ПРОДАЖ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КРІ

**О.М. Минаев, ЧГУ, Грозный
А.В. Разваров, ВИБТ, Воронеж**

Аннотация: в статье предложен способ автоматизации учета результатов деятельности менеджеров по продажам или торговых представителей компании с помощью внедрения в информационную систему учета продаж модуля оценки их деятельности с использованием показателей КРІ.

Ключевые слова: информационная система, показатели КРІ, автоматизация учета, оптимизация процессов.

Информационные технологии на сегодняшний день нашли самое широкое применение в различных областях человеческой деятельности, таких как наука, производство, бизнес и т.д. Внедрение информационных систем в различные бизнес-структуры позволяет значительно повысить эффективность их деятельности, что несомненно способствует расширению подобных информационных систем, повышению их функциональных возможностей и удобства работы с ними [1].

Вместе с тем следует отметить, что невозможно в одной информационной системе охватить весь требуемый функционал для конкретных компаний, что показывает актуальность возможности доработок под требования заказчика. Не все информационные системы содержат программные средства, позволяющие дорабатывать ее функционал, гибко подстраиваясь под способ ведения учета, принятый в данной компании [3].

Конечным этапом работы в информационной системе автоматизации учета продаж в торговой компании является подведение итогов деятельности менеджеров по продажам или торговых представителей за определенный период. С этой целью

большинство торговых компаний предпочитают использовать различные собственные показатели эффективности сотрудников, учитывающие специфику их деятельности. К таким показателям можно отнести объемы продаж, валовой прибыли, различные показатели, учитывающие степень исполнения определенных задач в зависимости от направления деятельности сотрудника [4].

В связи с тем, что во многих информационных системах учета продаж отсутствует возможность оценивать эффективность менеджеров по продажам и торговых представителей с помощью показателей KPI, и нет встроенных программных средств для реализации данной возможности, становится актуальной задача разработать внешний модуль для добавления указанного функционала в ИС компании. Данный модуль обрабатывает данные, экспортируемые из используемой в компании ИС учета продаж в формате MS Excel (*.xls). Общая схема взаимодействия модуля оценки эффективности менеджеров по продажам и торговых представителей компании с информационной системой учета продаж приведена на рисунке 1.

Структура модуля оценки эффективности менеджеров по продажам и торговых представителей компании по ключевым показателям эффективности (KPI) имеет следующий вид (рис. 2).

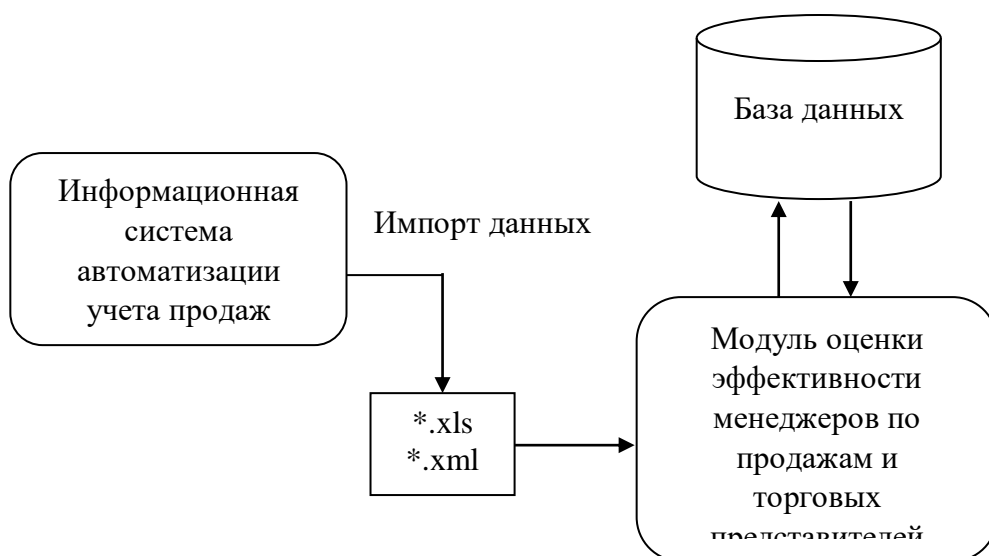


Рис. 1 – Общая схема взаимодействия модуля оценки эффективности менеджеров по продажам с информационной системой учета продаж



Рис. 2 – Структура модуля оценки эффективности менеджеров по продажам

Рассмотрим специфику ключевых показателей эффективности продаж, которые используются в модуле оценки эффективности деятельности менеджеров по продажам и торговых представителей

компании. КРІ продаж – это показатели, которые помогают отделам продаж измерять их эффективность и результативность с общей целью улучшения бизнес-методологий и процессов для стимулирования продаж.

Ключевой показатель эффективности продаж может помочь командам и их руководителям оценить, насколько эффективны их усилия. Измеряя ключевые показатели эффективности продаж, компании могут оптимизировать свои процессы и помочь отделу продаж в достижении бизнес-целей. Анализ ключевых показателей эффективности дает возможность менеджерам и торговым представителям расставить приоритеты в своих усилиях по продажам [6].

КРІ продаж помогают организациям оценить, насколько хорошо организован процесс продаж. Кроме того, это помогает им получить представление о функционировании отделов продаж и некоторых потенциальных препятствиях, с которыми менеджеры и торговые представители могут столкнуться в своей деятельности – от привлечения потенциальных клиентов до превращения их в постоянных клиентов [2].

Таким образом, КРІ продаж действует как важная измеримая метрика, которая может продемонстрировать эффективность компании в отношении поставленных целей. Кроме того, ключевые показатели эффективности продаж действуют как системы показателей для измерения финансового состояния компании [5].

Измеряя ключевые показатели эффективности продаж, компания также может изучить возможности для бизнеса. Например, предположим, фирма хочет запустить новый продукт. Может быть, сотрудники отдела продаж протестируют его на нескольких клиентах и используют свои ключевые показатели эффективности продаж для проверки определенной бизнес-модели перед ее масштабным запуском.

Интерфейс модуля оценки производительности менеджеров по продажам и торговых представителей компании по ключевым показателям эффективности (КРІ) приведен на рисунке 4.

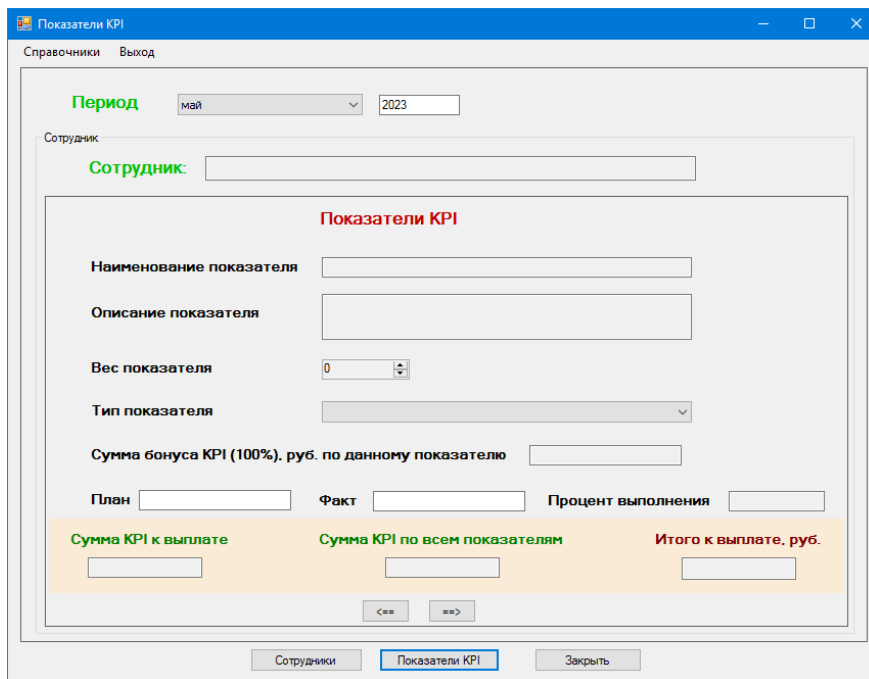


Рис. 4 – Интерфейс модуля оценки эффективности менеджеров по продажам

Главное окно модуля включает в себя основной блок оценки эффективности деятельности менеджеров по продажам. Для начала работы необходимо занести показатели эффективности и выполнить их настройку через справочник КРІ (рисунок 5).

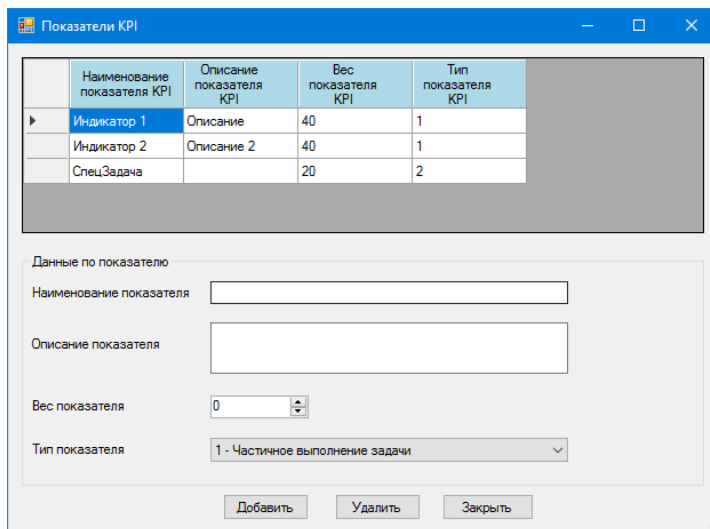


Рис. 5 – Справочник КРІ

Для каждого показателя указывается его наименование, описание, вес (в %), а также тип показателя. Тип показателя выбирается из двух значений: 1) частичное выполнение задачи и 2) спецзадача (либо выполнена, либо нет).

Для расчета итоговых результатов отчета эффективности

менеджеров по продажам необходимо указать плановые и фактические данные по каждому ключевому показателю эффективности (KPI).

Полученные результаты можно выгрузить в один из используемых в модуле форматов *.xls или *.xml для дальнейшего импорта в информационную систему автоматизации учета продаж.

Таким образом, в статье намечены подходы к интеграции внешнего модуля оценки эффективности деятельности менеджеров по продажам и торговых представителей компании с информационной системой автоматизации учета продаж, используя измеримые метрики KPI, выполнена реализация данного модуля с возможностью подбора каждой компанией собственных ключевых показателей эффективности продаж.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вендров А.М. Проектирование программного обеспечения экономических информационных систем. – М.: Финансы и статистика, 2020. – 544 с.

2. Ветлужских Е.М. Система вознаграждения. Как разработать цели и KPI. – М.: Альпина Паблишер, 2018. – 218 с.

3. Вишнякова М.В. KPI. Внедрение и применение. – СПб.: Питер, 2019. – 280 с.

4. Сафина Д.М. Управление ключевыми показателями эффективности: учебное пособие. – Казань: Казан. ун-т, 2018. – 123 с.

5. Ставицкая О.С. KPI – ключевые показатели эффективности, их виды и применение // Проблемы современной науки и образования. – №7(127), 2018. – с. 45-51.

6. Чернышев С.А. Принципы, паттерны и методологии разработки программного обеспечения. – М.: Юрайт, 2022. – 177 с.

УДК 004.89

МИНИМИЗАЦИЯ КОЛИЧЕСТВА ВХОДНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ АДАПТИВНОЙ СИСТЕМЫ НЕЙРО-НЕЧЕТКОГО ВЫВОДА ANFIS

**О.М. Минаев, ЧГУ, Грозный
С.Д. Умалатов, ДГТУ, Махачкала**

Аннотация: в статье предложено решение проблемы минимизации количества входных переменных при разработке нейро-нечеткой сети ANFIS с помощью анализа степени их коррелированности, разработан алгоритм решения данной задачи для системы прогнозирования набора абитуриентов в ВУЗ, реализуемой в виде нейро-нечеткой системы ANFIS, выполнена практическая реализация подготовительного блока комбинированной системы прогнозирования набора абитуриентов в ВУЗ.

Ключевые слова: нейро-нечеткая сеть, входные переменные, система прогнозирования, временное окно.

Задачу определения входных переменных нейро-нечеткой сети можно разбить на две подзадачи: 1) определение размерности входных данных (количество переменных на входе сети); 2) качество входных данных (их информативность) [5].

Так как увеличение количества входных переменных влияет на скорость работы нейро-нечеткой сети и приводит к усложнению ее структуры, то при разработке сети необходимо решать проблему минимизации количества входных переменных [3]. Решение данной проблемы непосредственно связано с качеством входных переменных, то есть емкостью информации, содержащейся в каждой входной переменной относительно рассматриваемой области. То есть минимизация количества входных переменных не должна влиять на качество самих переменных, иначе нарушится процесс обучения нейро-нечеткой сети [2].

Вместе с тем необходимость минимизации количества входных переменных продиктована еще одной проблемой, связанной зависимостью функционирования системы ANFIS от количества входных переменных. Известно, что при их количестве, превышающем 5-6, может нарушиться качество ее работы [6, стр. 434]. На практике это проявляется в увеличении времени обучения нейро-нечеткой сети ANFIS в несколько раз. Исходя из этого факта было решено ограничить количество входных данных для системы прогнозирования набора абитуриентов четырьмя переменными.

Одним из вариантов решения этой проблемы является определение степени зависимости входных переменных и отбор тех из них, которые имеют наибольший коэффициент корреляции.

Для этого используем коэффициент корреляции Пирсона, рассчитываемый по следующей формуле

$$r_{xy} = \frac{\sum (x_i - x_{\text{средн}}) \cdot (y_i - y_{\text{средн}})}{\sqrt{\sum (x_i - x_{\text{средн}})^2 \cdot \sum (y_i - y_{\text{средн}})^2}} \quad (1)$$

Коэффициент корреляции Пирсона (1) применяется для установления прямых связей между абсолютными значениями переменных. При этом распределения обоих рядов переменных должны приближаться к нормальному. Переменные x и y в формуле (1) должны отличаться одинаковым числом варьирующих признаков. Шкала Чеддока позволяет провести качественную оценку силы корреляционной связи между переменными x и y (таблица 1).

Таблица 1 – Шкала Чеддока

Абсолютное значение r_{xy}	Теснота (сила) корреляционной связи
менее 0.3	слабая
от 0.3 до 0.5	умеренная
от 0.5 до 0.7	заметная
от 0.7 до 0.9	высокая
более 0.9	весьма высокая

Для оценки статистической значимости коэффициента корреляции r_{xy} используем t -критерий Стьюдента:

$$T_{\text{набл}} = \frac{r_{xy} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}} \quad (2)$$

Сравнение значения $T_{\text{набл}}$ с критическим значением $t_{\text{кр}}$ проводится при определенном уровне значимости и числе степеней свободы $n-2$. Вывод о статистической значимости корреляционной связи делается в случае выполнения условия $|T_{\text{набл}}| > t_{\text{кр}}$ [4, стр. 328].

Разработаем алгоритм минимизации количества входных переменных для системы прогнозирования набора в ВУЗ, реализуемой в виде нейро-нечеткой системы ANFIS.

Систему прогнозирования набора в высшее учебное заведение можно представить в виде двух блоков: 1) блок подготовки исходных данных и отбора входных переменных для передачи в нейро-сетевую систему; 2) ядро системы, где непосредственно производятся вычисления значений выходной переменной. На рисунке 1 приведена схема работы данной системы.

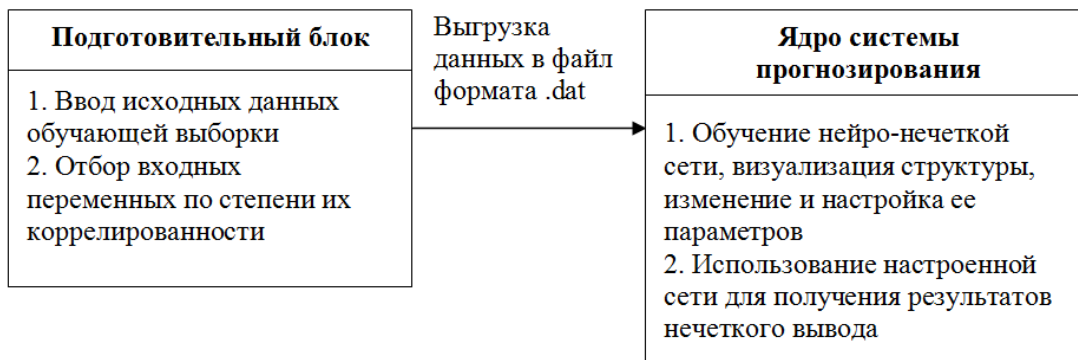


Рис. 1 – Обобщенная схема системы прогнозирования набора абитуриентов с помощью нейро-нечеткой сети ANFIS.

Практическая реализация подготовительного блока комбинированной системы прогнозирования набора абитуриентов выполнена в системе программирования Visual Studio 2019 с использованием технологии ADO.NET для доступа к данным.

Пользовательский интерфейс программного средства подготовки и отбора входных переменных представлен на рисунке 2.

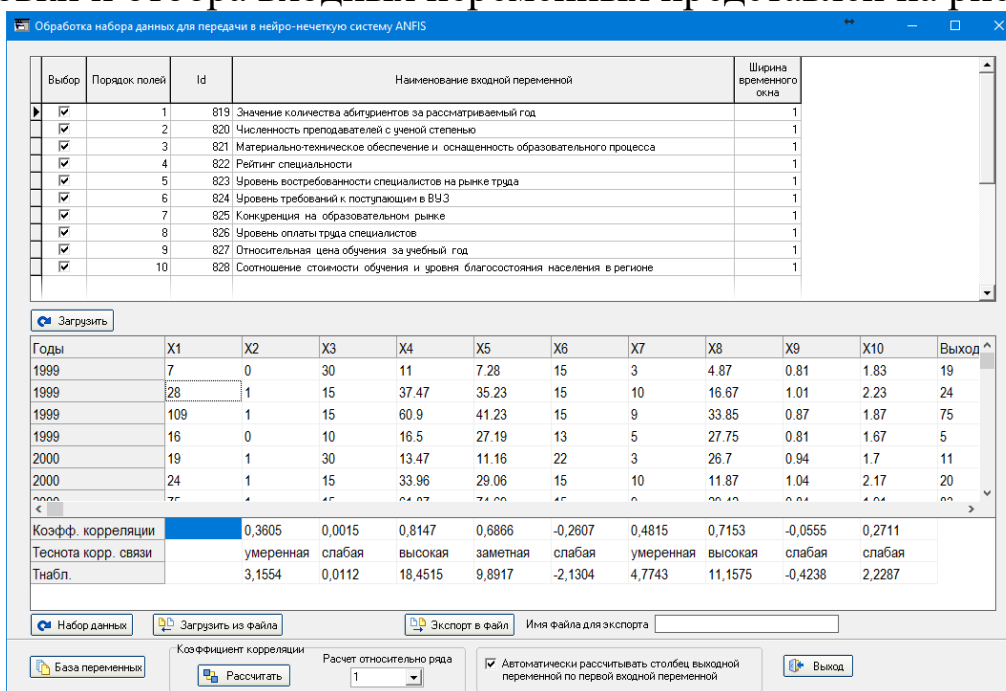


Рис. 2 – Интерфейс программы подготовки и отбора входных переменных для адаптивной системы нейро-нечеткого вывода ANFIS.

Результаты анализа силы корреляционной связи между рядами значений входных переменных X_2-X_{10} с рядом значений основной входной переменной X_1 , выполненных с помощью разработанного программного средства, сведем в таблицу 2.

Таблица 2 – Анализ зависимости между входными переменными X_1-X_{10}

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
Коэфф. корреляции	–	0,3605	0,0015	0,8147	0,6866	-0,2607	0,4815	0,7153	-0,0555	0,2711
Сила корр. связи	–	умеренная	слабая	высокая	замечательная	слабая	умеренная	высокая	слабая	слабая
t_r	–	3,1554	0,0112	18,4515	9,8917	-2,1304	4,7743	11,1575	-0,4238	2,2287
Статистич. значимость связи	–	Да	–	Да	Да	–	Да	Да	–	–

Последняя строка таблицы 2 содержит вывод о статистической значимости корреляционной связи наиболее высокого уровня, соответствующей рядом значений входных переменных X_8 , X_4 , X_7 , X_5 и X_2 , отсортированных по силе корреляционной связи.

При определении статистической значимости корреляционной связи в последней строке таблицы 2 используется значение $t_{кр}(\alpha; k) = t_{кр}(0,05; 58) = 2,02$, взятое из таблицы критических точек распределения Стьюдента по заданному уровню значимости $\alpha=0,05$ и числу степеней свободы $k = n-2=58$.

Переменную X_7 («Конкуренция на образовательном рынке») в дальнейшем исключим из рассмотрения, так как вычисленное значение коэффициента корреляции для этой переменной положительно, хотя с учетом реальной связи между рядами X_1 и X_7 , данный коэффициент должен быть отрицательным. Так как количество входных переменных системы нейро-нечеткого вывода ANFIS на практике ограничено 4 переменными, то из данного набора входных переменных оставляем переменные X_1 , X_4 , X_5 и X_8 .

Из обработанного множества исходных данных формируется выборка в формате .dat для дальнейшего анализа в нейро-нечеткой системе ANFIS. Данные, содержащиеся в этом файле, представляют собой числовую матрицу размерности $m \times (n+1)$, где m – объем выборки, первые n столбцов – значения входных переменных системы прогнозирования набора абитуриентов, а последний столбец – значение выходной переменной [3]. Столбец выходной переменной содержит количество абитуриентов по заданной специальности на

следующий год по отношению к текущему году каждой строки матрицы.

Состав входных переменных с указанием ширины временного окна приведен в таблице 3.

Таблица 3 – Ширина временного окна и состав входов, описывающих значимые факторы по результатам корреляционного анализа

Независимая переменная	Ширина временного окна	Номера соответствующих входов
X ₁	1	1
X ₄	1	2
X ₅	1	3
X ₈	1	4

Отобранный набор входных переменных используется для генерирования и обучения нейро-нечеткой системы прогнозирования набора абитуриентов с использованием ANFIS-редактора программы Matlab.

Таким образом, проблема минимизации количества входных переменных непосредственно связана со скоростью работы и упрощением структуры нейро-нечеткой сети. Использование методов определения корреляционной связи между рядами входных переменных позволяет решить задачу минимизации количества входных переменных для системы прогнозирования набора абитуриентов в ВУЗ, не влияя при этом на качество самих переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берёза А.Н., Ершова Е.А. Поддержка принятия решения при планировании набора абитуриентов в вузе на основе нечетких моделей / Известия ЮФУ. №7 (120). 2011, с. 131-136.
2. Борисов В.В., Круглов В.В., Федулов А.С. Нечёткие модели и сети. - М.: Горячая линия-Телеком, 2015. - 284 с.
3. Горбаченко В.И., Ахметов Б.С., Кузнецова О.Ю. Интеллектуальные системы: нечеткие системы и сети. - М.: Юрайт, 2022. - 106 с.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2004.

5. Демидова Л.А., Пылькин А.Н. Гибридные модели прогнозирования коротких временных рядов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2018. – 208 с.

6. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб.: БХВ-Петербург, 2014. - 736 с.

УДК 517.53

ОДНО НЕРАВЕНСТВО БЕРНШТЕЙНА ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

В.Р. Мисюк

Гродненский госуниверситет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

Аннотация: в данной статье рассматривается аналог теоремы Бернштейна теории рациональной аппроксимации, применительно к пространству Харди-Соболева.

Ключевые слова: наилучшее рациональное приближение, неравенство типа Бернштейна, обратные теоремы, пространство Харди-Соболева.

В настоящее время, рациональные приближения представляют собой одно из самых актуальных и динамично развивающихся направлений в математическом анализе. Начиная с классических трудов Д. Джексона и С. Н. Бернштейна, в этой области были получены как прямые, так и обратные теоремы теории приближения функций для разнообразных функциональных пространств, многие из которых теперь считаются окончательными. Цель данной заметки состоит в уточнении аналогов обратной теоремы теории рациональных приближений в пространстве Бергмана. Для формулировки соответствующих результатов приведем необходимые определения.

Пусть m_2 - плоская мера Лебега в комплексной области S . Для $0 < p \leq \infty$ через $L_p(D)$ обозначим пространство Лебега комплексных функций f на $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ относительно плоской меры Лебега с обычной квазинормой $\|f\|_{L_p(D)}$ (нормой при $1 \leq p \leq \infty$). Именно, $f \in L_p(D)$, если

$$\|f\|_{L_p(D)} = \left(\int_D |f(z)|^p dm_2(z) \right)^{1/p} < \infty \quad \text{при } 0 < p < \infty ,$$

$$\|f\|_{L_p(D)} = \operatorname{ess\,sup}_{z \in D} |f(z)| < \infty \quad \text{при } p = \infty .$$

Для функции f аналитической в D через $\hat{f}(k)$ обозначим её k -ый коэффициент Маклорена. Если $\alpha \geq 0$, то следующая функция, также является аналитической

$$J^\alpha f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^\alpha \hat{f}(k) z^k ,$$

называется производной f в смысле Вейля. Если $\alpha < 0$ функцию $J^\alpha f$ называют так же интегралом порядка $|\alpha|$.

Пусть $\alpha \in \mathbf{R}$ и $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$. Следуя, например, работам [1] и [2], через H_q^α обозначим пространство Харди - Соболева, т.е. множество аналитических в D функций с конечной квазинормой $\|f\| = \|J^\alpha f\|_{H_q^\alpha}$. Соответственно через B_q^α обозначим пространство Харди - Бесова. Именно, $f \in B_q^\alpha$, если при некотором $\beta > \alpha$ функция $(1-|z|^2)^{\beta-\alpha-1/q} \cdot (J^\beta f)(z)$ принадлежит $L_q(D)$. Квазинорма (норма при $1 \leq q \leq \infty$) в пространстве B_q^α определяется следующим образом

$$\|f\|_{B_q^\alpha} = \left\| (1-|z|^2)^{\beta-\alpha-1/q} \cdot (J^\beta f)(z) \right\|_{L_q(D)} = \left(\int_D \left| (1-|z|^2)^{\beta-\alpha-1/q} \cdot (J^\beta f)(z) \right|^q dm_2(z) \right)^{1/q} < \infty .$$

Определение пространства B_q^α не зависит от β , при различных β соответствующие квазинормы эквивалентны. Ради удобства, как правило, полагают $\beta = \alpha + 1$. Далее также будем полагать, что $\alpha > 0$.

Следующие два вложения (см., например, [7]) отражают связь между B_q^α и H_q^α .

$$B_p^\alpha \subset H_p^\alpha \quad \text{при } 0 < p \leq 2, \quad (1)$$

$$H_p^\alpha \subset B_p^\alpha \quad \text{при } 2 < p \leq \infty. \quad (2)$$

Пусть R_n – множество рациональных функций степени не выше n . Известно, что для $r_n \in \mathcal{R}_n \cap L_\infty(D)$ выполняется неравенство

$$\|r'_n\|_{L_2(D)} \leq \sqrt{\pi n} \|r_n\|_{L_\infty(D)},$$

которое было получено Е.П. Долженко в 1966 году [8] из геометрических соображений. В работе [9] были представлены обобщения этого результата на пространства $L_p(D)$, на высшие

производные и на производные дробного порядка. В частности, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. [9] Пусть $r_n \in \mathbf{R}_n$, с полюсами вне замыкания окружности D , $2 < p < \infty$ и $1/q = \alpha + 2/p$.

Тогда

$$\|r_n\|_{B_q^\alpha} \leq cn^{\alpha + \frac{1}{p}} \|r_n\|_{L_p(D)}, \quad (3)$$

где $c > 0$ и зависит лишь от α и p .

Далее приходим к следующему аналогу соотношения (3).

Теорема 2. Пусть $r_n \in \mathbf{R}_n$, с полюсами вне замыкания окружности D , $2 < p < \infty$ и $1/q = \alpha + 2/p$.

Тогда

$$\|r_n\|_{H_q^\alpha} \leq cn^{\alpha + \frac{1}{p}} \|r_n\|_{L_p(D)}, \quad (4)$$

где $c > 0$ и зависит лишь от α и p .

Согласно вложениям (1) и (2) теоремы 1 и 2 равносильны при $q=2$. Если же $0 < q < 2$, то сильнее теорема 1, а при $q > 2$ соответственно сильнее теорема 2. Несложно показать также, что соотношения (3) и (4) верны при $p = \infty$.

Теорема 3. Пусть $r_n \in \mathbf{R}_n$ с полюсами вне замыкания окружности D .

Тогда

$$\|r_n\|_{B_{\frac{1}{\alpha}}^\alpha} \leq cn^\alpha \|r_n\|_{L_\infty(D)},$$

где $c > 0$ и зависит лишь от α .

Теорема 4. Пусть $r_n \in \mathbf{R}_n$ с полюсами вне замыкания окружности D .

Тогда

$$\|r_n\|_{H_{\frac{1}{\alpha}}^\alpha} \leq cn^\alpha \|r_n\|_{L_\infty(D)},$$

где $c > 0$ и зависит лишь от α .

Говорим, что функция f принадлежит пространству Бергмана $A_p(D)$, $0 < p \leq \infty$, если она аналитична в D и конечна квазинорма

$$\|f\|_{A_p} := \|f\|_{L_p(D)}.$$

Введём

$$R_n(f, A_p) = \inf_{r_n \in \mathbf{R}_n} \|f - r_n\|_{A_p}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- наилучшее приближение f посредством рациональных функций степени не выше n с полюсами вне замыкания D . Заметим, что если для некоторой рациональной функции $r_n^* \in \mathcal{R}_n$ имеет место равенство

$$R_n(f, A_p) = \|f - r_n^*\|_{A_p},$$

то r_n^* называется *элементом наилучшего приближения* функции f . Известно (см., например, [4]-[6] и др.), что элемент наилучшего приближения существует, однако, он может быть не единственным. Приступим к формулировке обратных теорем теории рациональной аппроксимации.

Теорема 5. [9] Пусть функция f принадлежит $A_p(D)$, $2 < p < \infty$ и при некотором $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(n^{\alpha + \frac{1}{p}} R_n(f, A_p) \right)^{q'} < \infty,$$

где $q' = \min\{1, q\}$, а $1/q = \alpha + 2/p$. Тогда $f \in B_q^\alpha$.

Аналогично теореме 5 имеем.

Теорема 6. Пусть функция f принадлежит $A_p(D)$, $2 < p < \infty$ и при некотором $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(n^{\alpha + \frac{1}{p}} R_n(f, A_p) \right)^{q'} < \infty,$$

где $q' = \min\{1, q\}$, а $1/q = \alpha + 2/p$. Тогда $f \in H_q^\alpha$.

Эти выводы могут быть улучшены с помощью применения теории интерполяционных пространств.

Теорема 7. [10] Пусть функция f принадлежит $A_p(D)$, $2 < p < \infty$ и при некотором $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(n^{\alpha + \frac{1}{p}} R_n(f, A_p) \right)^q < \infty,$$

где $1/q = \alpha + 2/p$. Тогда $f \in B_q^\alpha$.

Теорема 8. Пусть функция f принадлежит $A_p(D)$, $2 < p < \infty$ и при некотором $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(n^{\alpha + \frac{1}{p}} R_n(f, A_p) \right)^q < \infty,$$

где $1/q = \alpha + 2/p$. Тогда $f \in H_q^\alpha$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Flett T.M. Lipschitz spaces of functions on the circle and the disk // J. Math. Anal. and Appl. - 1972. - V.39, № 1. - P.121-158.
2. Пекарский А.А. Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации // Матем. сб. - 1984. - Т.124, № 4. - С. 571-588.
3. Пекарский А.А. Рациональные приближения выпуклых функций // Матем. заметки. - 1985. - Т.38, № 5. - С. 679-690.
4. Уолш Дж. Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: ИЛ, 1961. – 508 с.
5. Lorentz G.G., Golitschek M.V., Makovoz Y. Constructive Approximation. Advanced problems. Berlin: Springer-Verlag, 1996. -651p.
6. DeVore R.A., Lorentz G.G. Constructive approximation. N.Y. Berlin, 1993.
7. Пекарский А.А. Чебышевские рациональные приближения в круге, на окружности и на отрезке // Матем. сб. - 1987. -Т.133, № 1. - С.86-102.
8. Долженко Е.П. Равномерные аппроксимации и глобальные функциональные свойства // Докл. Акад. наук СССР. - 1966. - Т.166, № 3. - С. 526-529.
9. Мисюк В.Р. Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций относительно плоской меры // Труды Института математики НАН Беларуси. - 2001. - Т.9. - С. 105-108.
10. Мисюк В.Р. Об обратной теореме теории рациональных приближений для пространств Бергмана // Проблемы физики, математики и техники. - 2010. - №1(2). - С. 34-37.

УДК 537.226

ТЕПЛОЕМКОСТЬ КОМПОЗИТА $x\text{CoFe}_2\text{O}_4-(1-x)\text{PbTiO}_3$

Р.Г. Митаров, С.Н. Каллаев
 ДГТУ, Институт физики ДФИЦ РАН, Махачкала

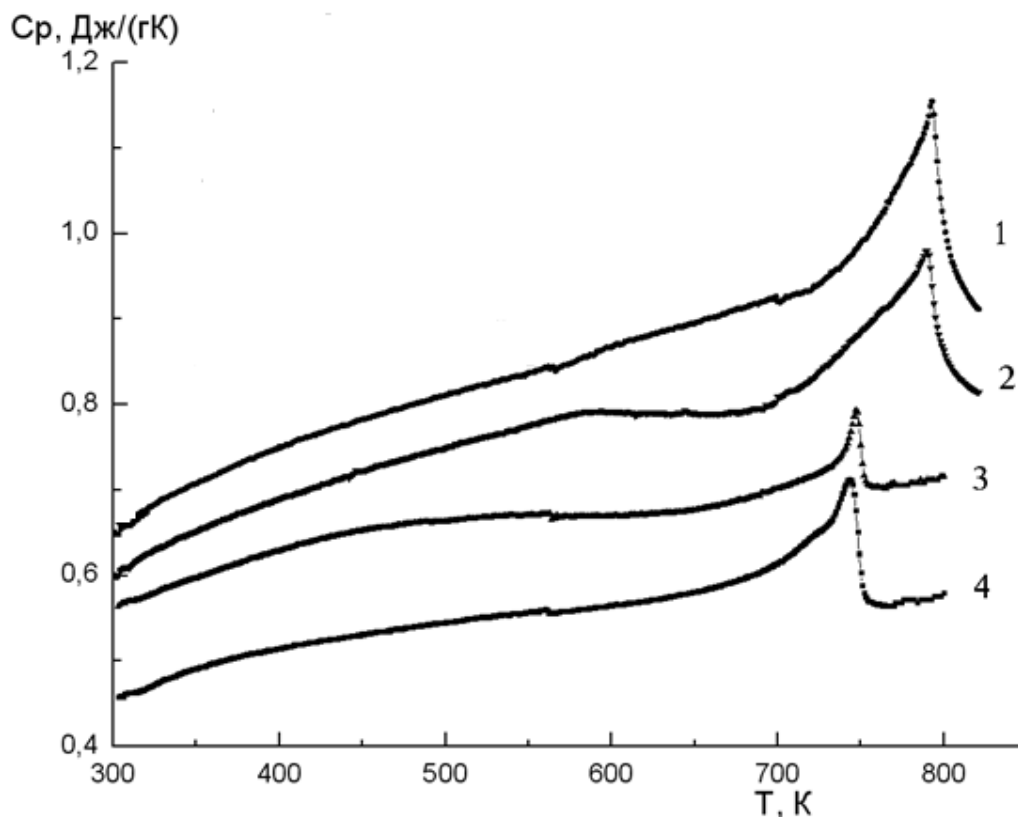
Аннотация: исследована температурная зависимость теплоемкости ультиферроидного композита $x\text{CoFe}_2\text{O}_4 - (1-x)\text{PbTiO}_3$ в интервале температур 150-820К. Установлено, что добавление сегнетоэлектрика титаната свинца к ферромагнетику ферриту

кобальта приводит к смещению температуры магнитного фазового перехода в область низких температур на 50 К и к уменьшению теплоемкости.

Ключевые слова: теплоемкость, мультиферроидный композит, эффект Шоттки.

Композитные материалы получают при комбинации двух или более однофазных соединений, и они должны сохранять свойства исходной фазы, приобретая новые функциональные возможности. Исследование этих материалов сильно мотивирована потребностью современной электроники в новых соединениях со свойствами, которые недоступны в однофазных материалах, а также в получении материалов с улучшенными физическими характеристиками [1]. Необходимость синтеза новых мультиферроиков связана с их уникальными свойствами, связанными с одновременной реализацией электрической и магнитной структур, которые имеют высокий прикладной потенциал для использования в многофункциональных устройствах (спинтроника, элементы памяти, магнитные датчики и др.) [2]. Нами исследована теплоемкость композита $x\text{CoFe}_2\text{O}_4 - (1-x)\text{PbTiO}_3$. Феррит кобальта CoFe_2O_4 известен самым высоким значением коэффициент магнитострикции среди всех известных ферритов-шпинелей, с умеренным значением намагниченности насыщения, химической стойкостью и высокой механической твердостью. Титанат свинца PbTiO_3 является одним из наиболее важных сегнетоэлектриков из семейства перовскитов с высокой температурой Кюри ($T_K \sim 490$ С), высоким пироэлектрическим коэффициентом (250 мКл/см²К), низкой диэлектрической проницаемостью и высокой спонтанной поляризацией. Этот материал имеет широкое применения в электронике. (конденсаторы, ультразвуковые преобразователи, термисторы) и в оптоэлектронике. Благодаря высокому пироэлектрическому коэффициенту и низкой диэлектрической проницаемости, PbTiO_3 является многообещающим материалом для изготовления инфракрасных пироэлектрических детекторов. Экспериментальные данные теплоемкости C_p мультиферроидного композита $x\text{CoFe}_2\text{O}_4 - (1-x)\text{PbTiO}_3$ в интервале температур 150-820К представлены на рис.1. ($x=1,0(1)$; $0,90(2)$; $0,60(3)$; $0,30(4)$). При добавлении сегнетоэлектрика титаната свинца к ферромагнетику ферриту кобальта температура фазового перехода (ФП) понижается от 793 К до 744 К, уменьшается также теплота ФП.

При добавлении титаната свинца к ферриту кобальта температура Дебая также понижается и это свидетельствует о том, что силы связи между атомами кристаллической решетки при этом ослабевают.



Анализ температурной зависимости избыточной теплоемкости ΔC позволяет интерпретировать ее как аномалию Шоттки для трехуровневых состояний. В общем случае выражение для теплоемкости Шоттки можно получить, дифференцируя среднюю энергию частиц на энергетических уровнях [3]:

$$C_{\text{Ш}}^T = (kT^2)^{-1} (\langle \Delta E_i^2 \rangle - \langle \Delta E_i \rangle^2) \quad (1)$$

Для трехуровневой системы выражение для теплоемкости Шоттки имеет вид [4]:

$$C_{\text{Ш}}^T = R \cdot [D_1 \cdot (\Delta E_1/kT)^2 \cdot \exp(-\Delta E_1/kT) + D_2 \cdot (\Delta E_2/kT)^2 \cdot \exp(-\Delta E_2/kT)] / [1 + D_1 \cdot \exp(-(\Delta E_1/kT) + D_2 \cdot \exp(-\Delta E_2/kT))]^2, \quad (2)$$

где D_1 и D_2 - отношение кратностей вырождения уровней.

Путем сравнения теплоемкости, рассчитанной по формуле (2) и экспериментально выделенной избыточной теплоемкости $C_{\text{Ш}}^{\text{эксп}}$, получены модельные параметры $CoFe_2O_4$: $D_1=7,675$, $D_2=2.157$, $\Delta E_1=4,782\text{eV}$ и $\Delta E_2=1.186\text{eV}$, а для состава $0,3CoFe_2O_4 - 0,7PbTiO_3$: $D_1=15,369$, $D_2=0.715$, $\Delta E_1=1,678\text{eV}$ и $\Delta E_2=0.0618\text{eV}$. Согласно

экспериментально выделенной аномальной теплоемкости $C_{\text{ш}}^{\text{эксп}}$ с вычисленной по формулу (2) $C_{\text{ш}}^{\text{T}}$ достаточно хорошее.

Таким образом, на основании экспериментального исследования мультиферроидного композита $x\text{CoFe}_2\text{O}_4 - (1-x)\text{PbTiO}_3$ в интервале температур 150-820К установлено, что при добавлении титаната свинца к ферриту кобальта температура ФП понижается от 793 К до 744 К, а теплота ФП уменьшается. Дополнительную компоненту теплоемкости в $x\text{CoFe}_2\text{O}_4 - (1-x)\text{PbTiO}_3$ можно интерпретировать как аномалию Шоттки для трехуровневых состояний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fiebig M., Lottermoser T., Meier D., Trassin M. The evolution of multiferroics. //Nat. Rev. Mater. 1 (2016) 1e14.
2. H. Palneedi, V. Annapureddy, S. Priya, J. Ryu. Status and perspectives of multiferroic magnetoelectric composite materials and applications. // Actuators 5 (9) (2016) 1e31.
3. Mitarov R.G., Tikhonov V.V., Vasilev L.N. et.al. Schottky effect in the $\text{Pr}_3\text{Te}_4\text{-Pr}_2\text{Te}_3$ system // Phys.Stat.Sol. (a), 30, (1975), p.457-467.
4. Митаров Р.Г., Каллаев С.Н., Омаров З.М., Назарова О.М. Влияние мультиплетных уровней Sm^{3+} и Eu^{3+} на теплоемкость BiFeO_3 . // Физика твердого тела, 63 (2021), С. 763-766.

УДК 517

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РИМАНА - ГИЛЬБЕРТА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

А.М. Нурмагомедов
ДГТУ, Махачкала

Аннотация: показана инвариантность формы сингулярного интегрального оператора с ядром Коши относительно кривой интегрирования для широких классов контуров на комплексной плоскости. На основании этого получено обобщение неравенства Рисса - Зигмунда [1] в улучшенной форме.

Ключевые слова: инвариантность, сингулярность, интегральный оператор, ядро Коши, индекс.

Рассматриваются краевые задачи для интегральных уравнений с ядром Коши. Доказана инвариантность формы этого оператора относительно кривой интегрирования для широких классов контуров на комплексной плоскости. На основании этого получено обобщение неравенства Рисса - Зигмунда [1] в улучшенной форме; показана пригодность интегральной формулы Шварца, соответственно, разрешимость задачи Шварца для определения гармонической функции для этих контуров.

Отдельно дается метод повышения индекса для задачи Римана, эквивалентный переход от задачи Гильберта к задаче Римана, что значительно облегчает решение задачи Гильберта в замкнутой форме и дает полное общее решение задачи. Однородная задача Гильберта с индексом $\alpha \geq 0$ имеет $(2\alpha + 1)$ линейно независимых решений.

1. Инвариантность ядра Коши сингулярного интеграла и ее приложения.

Пусть Γ - замкнутая кривая без точек самопересечения, удовлетворяющая условию $\frac{ds}{|dr|} \leq N < \infty$. Класс таких контуров

обозначим через (γ) . Для $\Gamma \in (\gamma)$ примем, что $\frac{1}{\pi \cdot i} \int_{\Gamma} \frac{d\tau}{\tau - t} = 1$ почти всюду.

Если контур замкнутый, то внутренняя область, ограниченная кривой Γ обозначим через D^+ . Для каждого контура $\Gamma \in (\gamma)$ существуют такие

$m(\Gamma), M(\Gamma)$, что $0 < m \leq \frac{ds}{d\varphi} \leq M < \infty$, где s - элемент длины дуги кривой Γ ,

$\varphi \in [0; 2\pi]$. Очевидно, что для замкнутых контуров $\Gamma \in (\gamma)$ при всех целых значениях $n \neq -1$ имеет место равенство $\oint_{\Gamma} t^n dt = 0$, где интеграл

понимается в смысле Лебега. С учетом последнего почти всюду имеет место равенство

$$(Au)(t) \equiv \frac{1}{\pi \cdot i} \oint_{\Gamma} \frac{u(\tau)}{\tau - t} d\tau = \sum_{n \geq 0} a_n t^n - \sum_{k \geq 1} b_k t^{-k}, \quad u(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n + \sum_{k \geq 1} b_k t^{-k}, \quad (1)$$

где $u(t) \in L_p(\Gamma)$, $p \in (1; \infty)$.

Теорема 1.1. Пусть замкнутая кривая $\Gamma \in (\gamma)$. Тогда при любой $u(t) \in L_p(\Gamma)$ ($p \in (1; \infty)$) выполняется равенство

$$(Au)(t) = \frac{1}{\pi \cdot i} \int_{|\tau_0|=1} \frac{u^0(\tau_0)}{\tau_0 - t} d\tau_0 = (A^0 u^0)(t_0), \quad u^0(t_0) = u(t(t_0)); \quad (2)$$

и имеет место обобщенное неравенство Рисса-Зигмунда

$$\int_{\Gamma} |(Au)(t)|^p dt \leq B(\Gamma) \cdot A_p \cdot \|u(t)\|_p^p, \quad B = \frac{M}{m}. \quad (3)$$

Доказательство равенства (2) прямо вытекает из равенства (1).

При конформном отображении области D^+ на единичный круг

$$u(t) = u^0(t_0) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n + \sum_{k \geq 1} b_k t^{-k} = \sum_{n \geq 0} a_n^0 t_0^n + \sum_{k \geq 1} b_k^0 t_0^{-k}; \quad (4)$$

из последнего и следует равенство (2). Аналогично получаем и неравенство (3)

$$\|Au\|_p^p = \int_0^{2\pi} |(A^0 u^0)(\tau_0)|^p s'_\varphi d\varphi \leq M \|A^0 u^0\|_p^p \leq MA_p \|u^0\|_p^p = MA_p \int_\Gamma |u(t)|^p (s'_\varphi)^{-1} ds = \frac{M}{m} A_p \|u\|_p^p. \quad (5)$$

Замечание. Утверждения теоремы остаются верными и в случае разомкнутого контура Γ без точек самопересечения, а также, когда Γ состоит из конечного числа соответствующих разомкнутых контуров.

Для доказательства достаточно замкнуть эти контура в один контур с сохранением принадлежности классу (γ) , и принять $u(t) = 0$ на дополнительных кривых замыкания.

Обычно авторы при переходе интеграла от контура Γ к единичной окружности пользуются прямым равенством

$$(Au)(t) = \frac{1}{\pi \cdot i} \int_{|\tau|=1} \frac{u^0(\tau_0)}{\tau_0 - t} \Psi(t_0, \tau_0; t, \tau) d\tau_0, \quad \Psi = \frac{\tau_0 - t_0}{\tau - t} \cdot \frac{d\tau}{d\tau_0}, \quad (6)$$

что сильно осложняет дело; и часто делает невозможным перенос свойств оператора A^0 к оператору A .

Равенство(2) позволяет обобщить формулу Шварца на контуры класса (γ) .

Теорема 1.2. Пусть $\Gamma \in (\gamma)$, $t = t(s) \in \Gamma$, s – длина дуги кривой Γ от начала до точки t , $s \in [0, l]$. На Γ задана действительная функция $u(s)$, принадлежащая L_p .

Тогда аналитическая в области D^+ функция, действительная часть граничного значения которой равна $u(s)$, определяется по обобщенной формуле Шварца:

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\pi \cdot i} \int_\Gamma \frac{u(s) d\tau}{\tau - z} - a_0 + C \cdot i, \quad a_0 = \frac{1}{2 \cdot l} \int_0^l u(s) ds, \quad z \in D^+. \quad (7)$$

Функция $\Phi^+(z)$ голоморфна в каждой внутренней точке области D^+ . Значит, она аналитична в этой области.

По формуле Племеля- Сохоцкого граничное значение

$$\Phi^+(t) = u(s) + \frac{1}{\pi \cdot i} \int_\Gamma \frac{u(s) d\tau}{\tau - t} - a_0 + C \cdot i. \quad (8)$$

Из равенства (2) и классической формулы Шварца [2] получаем, что

$$\Phi^+(t) = u(s) + \frac{1}{\pi \cdot i} \int_0^{2\pi} \frac{u^0(\tau_0)}{\tau_0 - t_0} d\tau_0 - a_0 + C \cdot i = u(s) - \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{u}(\phi) \operatorname{ctg} \frac{\phi - \varphi}{2} d\phi + C \cdot i, \quad (9)$$

где $\bar{u}(\varphi) = u(s(\varphi))$, $s(\varphi)$ - функция, получаемая при конформном отображении области D^+ на единичный круг.

Таким образом, получаем, что $\operatorname{Re}[\Phi^+(t)] = u(s)$. Одновременно получаем, что сопряженная $u(s)$ функция

$$v(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{u}(\phi) \operatorname{ctg} \frac{\phi - \varphi}{2} d\phi + C,$$

где C - произвольная действительная постоянная.

Теорема 1.2 дает также и решение задачи Шварца для области D^+ . Задача Шварца заключается в определении гармонической в области D^+ функции $U(x, y)$ по заданному граничному значению $u(s)$. Согласно равенству (7) $\Phi^+(z) = U(x, y) + iV(x, y)$, где U, V - функции, гармонические в области D^+ . Предельным значением функции $U(x, y)$, согласно равенству (9), является $u(s)$.

Для круга с центром в начале координат задача Шварца решается по формуле Пуассона [3] с помощью перехода к полярным координатам. Формула (7), по нашему мнению, дает более простое и естественное решение задачи Шварца и для круга.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. - М.: Мир. 1977. 412 с.
2. Симоненко И.Б. Краевые задачи Римана для n пар функций с измеримыми коэффициентами и их приложения к исследованию сингулярных интегралов в пространстве L_p с весами. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. № 2. С. 277 - 306.
3. Лионс Ж - Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.
4. Магомедов Г.М. Нелокальная теорема о неявной функции и её применение к нелинейному интегральному уравнению. // Докл. АН СССР. 1973. Т. 212. № 5. С. 1056-1058.

УДК 517

О ЕДИНОМ ПОДХОДЕ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СИНУСОВ

А.М. Нурмагомедов, Р.М. Нурмагомедова
ДГТУ, Махачкала

Аннотация: в различных прикладных задачах довольно часто приходится иметь дело с разнообразными синусами. В работе предпринята попытка определить их с единой точки зрения, используя понятие интеграла.

Ключевые слова: синус, косинус, окружность, гипербола, лемниската, подвижная точка.

В решении различных прикладных задач приходится сталкиваться с различными синусами. В работе предпринята попытка изложения некоторых из них с единой точки зрения. В начале определим их с несколько иной точки зрения.

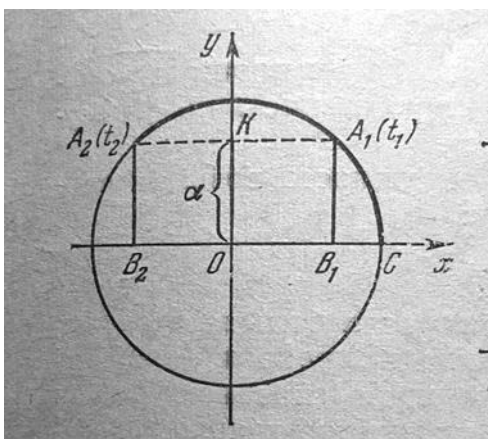
1. Тригонометрический синус.

Рассмотрим единичную окружность $x^2 + y^2 = 1$. Длина дуги от точки $C(1,0)$ до точки $A(x,y)$ определяется с точностью до целого кратного полной длины окружности $2\pi k$, где k -целое число оборотов. Координаты x,y точки A не зависят от числа оборотов. Так что, являются периодическими функциями относительно длины дуги t с периодом 2π . Положим, по определению,

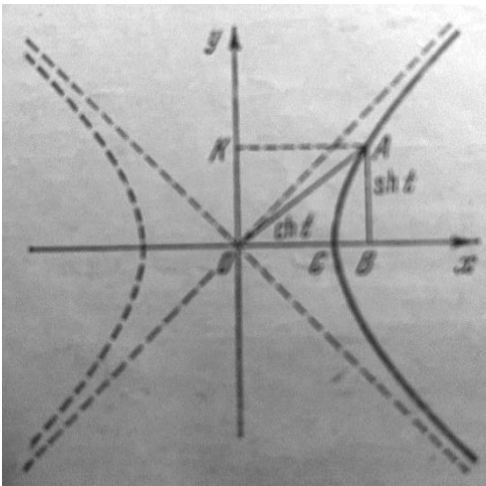
$$x = \cos t, y = \sin t.$$

Очевидно, $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. А из симметрии вытекает, что $\cos(-t) = \cos t, \sin(-t) = -\sin t$. Также из соображений симметрии относительно биссектрисы координатных углов получаем, так называемые, формулы приведения.

Параметр t в этом определении можно рассматривать также,



как удвоенную площадь сектора OCA . Если радиус сделает k целых оборотов (k имеет тот или иной знак в зависимости направления вращения), то описываемая им площадь изменится на πk и, соответственно, в определении t включается слагаемое $2\pi k$. Такой же подход мы применим при определении остальных синусов.



Прежде заметим, что уравнение $\sin t = a$ в промежутке $[0, 2\pi)$ имеет следующее количество корней: при $a > 1$ корней нет; при $a = 1$ - один корень $t = \frac{\pi}{2}$; при $0 < a < 1$ - два корня $0 < t_1 < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < t_2 = \pi - t_1 < \pi$; при $a = 0$ - два корня $t_1 = 0, t_2 = \pi$; при $-1 < a < 0$ - два корня $\pi < t_1 < \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} < t_2 = 2\pi - t_1 < 2\pi$;

при $a = -1$ - один корень $t_1 = \frac{3\pi}{2}$.

2. Гиперболический синус.

Вместо единичной окружности рассмотрим единичную равнобочную гиперболу: $x^2 - y^2 = 1$. Через t обозначим удвоенную площадь сектора OCA . Площадь будем считать положительной или отрицательной в зависимости от того, в каком направлении происходит движение от OC к OA . Если точка A описывает правую ветвь гиперболы при $-\infty < y < +\infty$, то t соответственно меняется от $-\infty$ до $+\infty$.

По аналогии с тем, что делалось ранее, положим по определению:

$$y = sh t, x = ch t$$

(читается, соответственно, синус и косинус гиперболические).

Очевидно, $ch^2 t - sh^2 t = 1$. Пользуясь симметрией гиперболы относительно оси OX , получаем, что: $ch(-t) = ch t, sh(-t) = -sh t$.

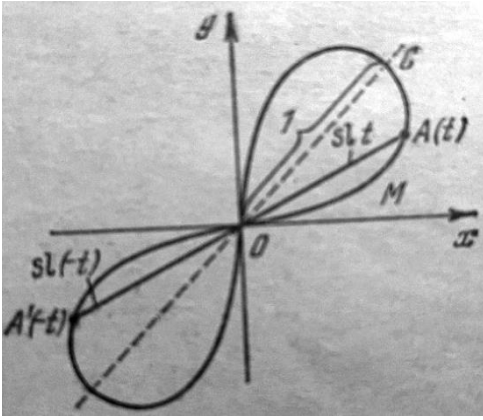
Уравнение $sh t = a$ при любом действительном значении a имеет единственный корень, нахождение которого сводится к нахождению соответствующих площадей.

3. Лемнискатический синус.

Лемнискатой Бернулли называется множество точек на плоскости, произведение расстояний которых до двух фиксированных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная и равная a .

Если фокусы расположить в точках $F_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и $a = \frac{1}{2}$, то по определению:

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$



После несложных преобразований получаем уравнение лемнискаты в следующем виде: $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$. Если в этом уравнении перейти к полярным координатам, получаем уравнение в следующем виде: $r^2 = \sin 2\varphi$. При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ получаем максимальное значение $r = 1$.

Из уравнения видно, что лемниската – кривая симметричная относительно начала координат и биссектрис координатных четвертей. Подвижная точка M , выйдя из начала координат, описывает часть кривой, расположенную в первой четверти, двигаясь против часовой стрелки. Первый раз, возвращаясь к началу координат, она перемещается по дуге, касающейся оси OY . Для продолжения по части, расположенной в третьей четверти, движение происходит по часовой стрелке. Всю длину кривой обозначим через 2ω . Очевидно, длина дуги OMC равна $\frac{\omega}{2}$.

Как и в случае окружности, переменная точка M попадает из начала дуги O в ее конец A после некоторого числа полных оборотов вдоль всей кривой в том или ином направлении. Поэтому длина t дуги OA определяется с точностью для целого кратного 2ω . Таким образом определенную функцию обозначим через $r = sl t$ (читается: «лемнискатический синус»). Как было отмечено выше: $sl \frac{\omega}{2} = 1$.

Из соображений симметрии получаем, что: а) $sl(-t) = -sl t$; б) $sl(\omega - t) = sl t$; в) $sl(\omega + t) = -sl t$.

Если рассмотреть уравнение $sl t = a$ в промежутке $[0, 2\omega)$, то можно заметить полную аналогию с уравнением $\sin t = a$. При: $a > 1$ корней нет; $a = 1$ - один корень $t = \frac{\omega}{2}$; $0 < a < 1$ - два корня $0 < t_1 < \frac{\omega}{2}, \frac{\pi\omega}{2} < t_2 = \omega - t_1 < \omega$; $a = 0$ - два корня $t_1 = 0, t_2 = \omega$; $-1 < a < 0$ - два корня $\omega < t_1 < \frac{3\omega}{2}, \frac{3\omega}{2} < t_2 = 2\omega - t_1 < 2\omega$; $a = -1$ - один корень $t_1 = \frac{3\omega}{2}$.

График введенной функции напоминает график обычного кругового синуса.

4. Обобщенный синус.

Попробуем здесь установить возможность единого подхода к определению синусов. С этой целью будем рассматривать введенные выше синусы как функции, обратные к некоторым интегралам.

При определении функции $y = \sin t$ было отмечено, что переменная t представляет собой удвоенную площадь сектора OCA . Очевидно,

$$\text{пл. } \triangle OAK = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}y\sqrt{1-y^2}. \quad \text{Площадь криволинейной}$$

трапеции $OCAK$ равна $\int_0^y x dy = \int_0^y \sqrt{1-y^2} dy$. Применяя интегрирование по частям, получаем, что

$$\text{пл. } OCAK = \frac{1}{2}\sqrt{1-y^2} - \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}. \quad \text{Отсюда следует,}$$

$t = 2\text{пл. } OCA = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$. Если y возрастает от -1 до 1 , то t возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Верно и обратное. Следовательно, функцию $y = \sin t$ в интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ можно рассматривать как функцию, обратную функции $t = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$.

При определении гиперболического синуса t была рассмотрена как удвоенная площадь сектора OCA . Очевидно,

$$\text{пл. } OCA = \text{пл. } OCAK - \text{пл. } \triangle OAK = \frac{1}{2}\sqrt{1+y^2} - \int_0^y \sqrt{1+y^2} dy = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Таким образом, $t = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}$. Если y возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, t также возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Верно и обратное. Следовательно, функцию $y = \text{sh } t$ можно рассматривать как функцию, обратную функции $t = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}$.

Попутно заметим, что $t = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$. Отсюда следует, что $y + \sqrt{1+y^2} = e^t, y - \sqrt{1+y^2} = \frac{1}{y + \sqrt{1+y^2}} = e^{-t}$ и $y = \text{sh } t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, что часто применяют за определение гиперболического синуса.

Перейдем к функции $r = \text{sl } t$. В этом случае t рассматривалась как длина дуги лемнискаты: $dt = \sqrt{r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 + 1} dr$. Отсюда с учетом того, что $\varphi = \frac{1}{2} \arcsin r^2$, получаем $\frac{d\varphi}{dr} = \frac{r}{\sqrt{1-r^4}}$. Следовательно, $dt = \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$ или $t = \int_0^y \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$.

Если y возрастает от -1 до 1 , то t возрастает от $-\frac{\omega}{2}$ до $\frac{\omega}{2}$. Верно и обратное. Следовательно, функцию $y = slt$ в интервале $(-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2})$ можно рассматривать как функцию, обратную функции $t = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$.

С учетом изложенного, можно сделать вывод о том, что каждый из рассмотренных синусов представляет функцию, обратную функции

$$t = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1+my^2+ny^4}}.$$

При $m = -1, n = 0$ получаем функцию $y = sint$; при $m = 1, n = 0$ получаем функцию $y = sh t$; при $m = 0, n = -1$ получаем функцию $y = sl t$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.И. Маркушевич. Замечательные синусы. М.: Наука, 1974, 96 с.

УДК 517.912

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Ж.А. Отарова, Д.С. Шамуратов
КГУ им. Бердаха, Нукус, Узбекистан

Аннотация: в статье рассматривается решение дифференциальных уравнений дробного порядка с использованием методов интегрального преобразования. Аналитическое решение неоднородного дифференциального уравнения дробного порядка найдено с использованием интегральных преобразований Лапласа, Эльзаки, Моханда, Сумуду и Сави.

Ключевые слова: интегральные преобразования, неоднородные дифференциальные уравнения дробного порядка, дифференцируемость.

Интерес к дробным уравнениям, как обычным, так и в частных производных, в последние десятилетия неуклонно растет. Интегральные преобразования являются одним из аналитических подходов, используемых при решении дифференциальных уравнений

с дробной частью. Интегральные преобразования важны для облегчения решения дифференциальных уравнений, которые трудно решить при определенных предельных или начальных значениях. Среди интегральных преобразований наиболее часто используется преобразование Лапласа (LT), которое преобразует переменную времени в переменную частоты, упрощая решение дифференциальных уравнений с дробной частью, которые кажутся сложными для решения. Большинство предлагаемых и применяемых преобразований на самом деле являются расширениями LT. За последние два десятилетия было введено несколько интегральных преобразований, облегчающих решение дифференциальных уравнений с дробной частью, таких как LT. Например, одно из таких преобразований, интегральное преобразование Сумуду (ST), было предложено Ватугалом в качестве альтернативы преобразованию Лапласа в 1990-х годах. К особым свойствам преобразования Сумуду относится сохранение размерности функции; единицы измерения самой функции и ее изображения совпадают. К недостаткам преобразования можно отнести отсутствие явной формулы для вычисления обратного преобразования. Преобразование может быть осуществлено путем решения соответствующего интегрального уравнения Фредгольма первого рода, которое сводится к решению плохо обусловленной системы линейных алгебраических уравнений. Интегральное преобразование Эльзаки получено из классического интеграла Фурье Таригом Эльзаки для облегчения процесса решения обыкновенных уравнений и уравнений с частными производными во временной области. Такие преобразования, как Лапласа, Сумуду, Эльзаки и Моханда, были представлены в [1-6]. Давайте применим эти интегральные преобразования для решения неоднородного дифференциального уравнения дробного порядка.

Учитывая функцию $f(x)$, определенную для $0 < x < \infty$, $F(s)$ преобразование Лапласа определяется как:

$$F(s) = L[f(x)] = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx, \quad (1)$$

по крайней мере, для тех, у которых интеграл сходится.

Пусть $f(x)$ является непрерывной функцией на интервале $[0, \infty)$, который имеет экспоненциальный порядок, то есть для некоторых $c \in R$ и $x > 0$

$$\sup \frac{|f(x)|}{e^{cx}} < \infty.$$

В этом случае преобразование Лапласа (1) существует для всех $s > c$ [7].

Ниже приведены некоторые из полезных преобразований Лапласа, которые применяются в этой статье:

$$L[f(x) + g(x)] = F(s) + G(s), \quad L[x^\beta] = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{s^{\beta+1}}, \quad \beta > -1,$$

$$L[f^{(n)}(x)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

$$L^{-1}[s^{-\beta}] = \frac{x^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}. \quad L[x^n f(x)] = (-1)^n F^{(n)}(s),$$

Лемма. Преобразование Лапласа дробного интегрального оператора Римана-Лиувилля порядка $\alpha > 0$ может быть получен в виде:

$$L[D^\alpha f(x)] = \frac{F(s)}{s^\alpha}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} & D^{\alpha+1}[x(t)] + D^\alpha[x(t)] + x'(t) + x(t) = \\ & = \frac{(n-1)!}{\Gamma(n-2-\alpha)} t^{n-3-\alpha} - \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\alpha)} t^{n-1-\alpha} + (n^2 - 3n + 2)t^{n-3} - t^{n-1}, \end{aligned} \quad (2)$$

Решим уравнение (2), используя преобразование Лапласа,

$$L[D^{\alpha+1}[x(t)] + D^\alpha[x(t)] + x'(t) + x(t)] =$$

$$= L\left[\frac{(n-1)!}{\Gamma(n-2-\alpha)} t^{n-3-\alpha} - \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\alpha)} t^{n-1-\alpha} + (n^2 - 3n + 2)t^{n-3} - t^{n-1} \right],$$

$$L[D^{\alpha+1}[x(t)]] + L[D^\alpha[x(t)]] + L[x'(t)] + L[x(t)] =$$

$$= \frac{(n-1)!}{\Gamma(n-2-\alpha)} L[t^{n-3-\alpha}] - \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\alpha)} L[t^{n-1-\alpha}] + (n^2 - 3n + 2)L[t^{n-3}] - L[t^{n-1}],$$

$$s^{\alpha+1}F(s) + s^\alpha F(s) + sF(s) + F(s) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{\Gamma(n-2-\alpha)} \frac{\Gamma(n-2-\alpha)}{s^{n-2-\alpha}} - \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\Gamma(n-\alpha)}{s^{n-\alpha}} + \frac{(n^2 - 3n + 2)\Gamma(n-2)}{s^{n-2}} - \frac{\Gamma(n)}{s^n},$$

$$F(s)(s^{\alpha+1} + s^\alpha + s + 1) = \frac{(n-1)!}{s^{n-2-\alpha}} - \frac{\Gamma(n)}{s^{n-\alpha}} + \frac{(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)}{s^{n-2}} - \frac{\Gamma(n)}{s^n},$$

$$F(s)(s^\alpha + 1)(s + 1) = \frac{(n-1)!}{s^n} (s^{\alpha+2} - s^\alpha + s^2 - 1),$$

$$F(s)(s^\alpha + 1)(s + 1) = \frac{(n-1)!}{s^n} (s^\alpha + 1)(s^2 - 1),$$

$$F(s) = \frac{(n-1)!}{s^n} (s - 1), \quad F(s) = \frac{(n-1)!}{s^{n-1}} - \frac{(n-1)!}{s^n},$$

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{(n-1)!}{s^{n-1}}\right] - L^{-1}\left[\frac{(n-1)!}{s^n}\right], \quad x(t) = (n-1)t^{n-2} - t^{n-1}.$$

Преобразование Сумуду [3]:

$$f(x) \Rightarrow F(u)$$

$$F(u) = S[f(x)] = \int_0^{\infty} f(ux)e^{-x} dx. \quad (3)$$

$$S[x^\beta] = u^\beta \Gamma(\beta + 1), \quad S[f^{(n)}(x)] = \frac{F(u)}{u^n} - \frac{f(0)}{u^n} - \frac{f'(0)}{u^{n-1}} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{u},$$

$$S^{-1}[u^{\beta-1}] = \frac{x^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}.$$

Решим уравнение (2), используя (3):

$$S[D^{\alpha+1}[x(t)] + D^\alpha[x(t)] + x'(t) + x(t)] =$$

$$= S\left[\frac{(n-1)!}{\Gamma(n-2-\alpha)}t^{n-3-\alpha} - \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\alpha)}t^{n-1-\alpha} + (n^2 - 3n + 2)t^{n-3} - t^{n-1}\right],$$

$$S[D^{\alpha+1}[x(t)]] + S[D^\alpha[x(t)]] + S[x'(t)] + S[x(t)] =$$

$$= \frac{(n-1)!}{\Gamma(n-2-\alpha)}S[t^{n-3-\alpha}] - \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\alpha)}S[t^{n-1-\alpha}] + (n^2 - 3n + 2)S[t^{n-3}] - S[t^{n-1}],$$

$$u^{-\alpha-1}F(u) + u^{-\alpha}F(u) + u^{-1}F(u) + F(u) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{\Gamma(n-2-\alpha)}\Gamma(n-2-\alpha)u^{n-2-\alpha} - \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\alpha)}\Gamma(n-\alpha)u^{n-\alpha} + (n^2 - 3n + 2)\Gamma(n-2)u^{n-2} - \Gamma(n)u^n,$$

$$F(u)(u^{-\alpha-1} + u^{-\alpha} + u^{-1} + 1) = (n-1)!u^{n-2-\alpha} - \Gamma(n)u^{n-\alpha} + (n-1)(n-2)\Gamma(n-2)u^{n-2} - \Gamma(n)u^n,$$

$$F(u)(u^{-\alpha} + 1)(u^{-1} + 1) = (n-1)!u^n(u^{-\alpha-2} - u^{-\alpha} + u^{-2} - 1),$$

$$F(u)(u^{-\alpha} + 1)(u^{-1} + 1) = (n-1)!u^n(u^{-\alpha} + 1)(u^{-2} - 1),$$

$$F(u) = (n-1)!u^n(u^{-1} - 1), \quad F(u) = (n-1)!u^{n-1} - (n-1)!u^n,$$

$$S^{-1}[F(u)] = S^{-1}[(n-1)!u^{n-1}] - S^{-1}[(n-1)!u^n], \quad x(t) = (n-1)t^{n-2} - t^{n-1}.$$

Преобразование Эльзаки [2]:

$$f(x) \Rightarrow T(u)$$

$$T(u) = E[f(x)] = u^2 \int_0^{\infty} f(ux)e^{-x} dx. \quad (4)$$

$$E[x^\beta] = u^{\beta+2}\Gamma(\beta + 1), \quad E[f^{(n)}(x)] = \frac{T(u)}{u^n} - \sum_{k=0}^{n-1} u^{2-n+k} f^{(k)}(0),$$

$$E^{-1}[u^{\beta+2}] = \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta + 1)}.$$

Давайте найдем решение уравнения (2), используя (4):

$$\begin{aligned}
& E\left[D^{\alpha+1}[x(t)] + D^\alpha[x(t)] + x'(t) + x(t)\right] = \\
& = E\left[\frac{(n-1)!}{\Gamma(n-2-\alpha)}t^{n-3-\alpha} - \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\alpha)}t^{n-1-\alpha} + (n^2-3n+2)t^{n-3} - t^{n-1}\right], \\
& E\left[D^{\alpha+1}[x(t)]\right] + E\left[D^\alpha[x(t)]\right] + E\left[x'(t)\right] + E\left[x(t)\right] = \\
& = \frac{(n-1)!}{\Gamma(n-2-\alpha)}E\left[t^{n-3-\alpha}\right] - \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\alpha)}E\left[t^{n-1-\alpha}\right] + (n^2-3n+2)E\left[t^{n-3}\right] - E\left[t^{n-1}\right], \\
& u^{-\alpha-1}T(u) + u^{-\alpha}T(u) + u^{-1}T(u) + T(u) = \\
& = \frac{(n-1)!}{\Gamma(n-2-\alpha)}\Gamma(n-2-\alpha)u^{n-1-\alpha} - \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\alpha)}\Gamma(n-\alpha)u^{n+1-\alpha} + (n^2-3n+2)\Gamma(n-2)u^{n-1} - \Gamma(n)u^{n+1}, \\
& T(u)\left(u^{-\alpha-1} + u^{-\alpha} + u^{-1} + 1\right) = (n-1)!u^{n-1-\alpha} - \Gamma(n)u^{n+1-\alpha} + (n-1)(n-2)\Gamma(n-2)u^{n-1} - \Gamma(n)u^{n+1}, \\
& T(u)\left(u^{-\alpha} + 1\right)\left(u^{-1} + 1\right) = (n-1)!u^{n+1}\left(u^{-\alpha-2} - u^{-\alpha} + u^{-2} - 1\right), \\
& T(u)\left(u^{-\alpha} + 1\right)\left(u^{-1} + 1\right) = (n-1)!u^{n+1}\left(u^{-\alpha} + 1\right)\left(u^{-2} - 1\right), T(u) = (n-1)!u^{n+1}\left(u^{-1} - 1\right), \\
& T(u) = (n-1)!u^n - (n-1)!u^{n+1}, E^{-1}\left[T(u)\right] = E^{-1}\left[(n-1)!u^n\right] - E^{-1}\left[(n-1)!u^{n+1}\right], \\
& x(t) = (n-1)t^{n-2} - t^{n-1}.
\end{aligned}$$

Преобразование Моханда:

$$f(x) \Rightarrow M(s)$$

$$M(s) = M[f(x)] = s^2 \int_0^\infty f(x)e^{-sx} dx. \quad (5)$$

$$M\left[x^\beta\right] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{s^{\beta+1}}, M\left[f^{(n)}(x)\right] = s^n M(s) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(0)}{s^{j-n+1}}, M^{-1}\left[s^{-\beta}\right] = \frac{x^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+2)}.$$

Найдем решение уравнения (2), используя преобразование (5)

$$\begin{aligned}
& M\left[D^{\alpha+1}[x(t)] + D^\alpha[x(t)] + x'(t) + x(t)\right] = \\
& = M\left[\frac{(n-1)!}{\Gamma(n-2-\alpha)}t^{n-3-\alpha} - \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\alpha)}t^{n-1-\alpha} + (n^2-3n+2)t^{n-3} - t^{n-1}\right], \\
& M\left[D^{\alpha+1}[x(t)]\right] + M\left[D^\alpha[x(t)]\right] + M\left[x'(t)\right] + M\left[x(t)\right] = \\
& = \frac{(n-1)!}{\Gamma(n-2-\alpha)}M\left[t^{n-3-\alpha}\right] - \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\alpha)}M\left[t^{n-1-\alpha}\right] + (n^2-3n+2)M\left[t^{n-3}\right] - M\left[t^{n-1}\right], \\
& s^{\alpha+1}M(s) + s^\alpha M(s) + sM(s) + M(s) = \\
& = \frac{(n-1)!}{\Gamma(n-2-\alpha)}\frac{\Gamma(n-2-\alpha)}{s^{n-4-\alpha}} - \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\Gamma(n-\alpha)}{s^{n-2-\alpha}} + \frac{(n^2-3n+2)\Gamma(n-2)}{s^{n-4}} - \frac{\Gamma(n)}{s^{n-2}}, \\
& M(s)\left(s^{\alpha+1} + s^\alpha + s + 1\right) = \frac{(n-1)!}{s^{n-4-\alpha}} - \frac{\Gamma(n)}{s^{n-2-\alpha}} + \frac{(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)}{s^{n-4}} - \frac{\Gamma(n)}{s^{n-2}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(s)(s^\alpha + 1)(s + 1) &= \frac{(n-1)!}{s^{n-2}}(s^{\alpha+2} - s^\alpha + s^2 - 1), \\
M(s)(s^\alpha + 1)(s + 1) &= \frac{(n-1)!}{s^{n-2}}(s^\alpha + 1)(s^2 - 1), \\
M(s) &= \frac{(n-1)!}{s^{n-2}}(s - 1), \quad M(s) = \frac{(n-1)!}{s^{n-3}} - \frac{(n-1)!}{s^{n-2}}, \\
M^{-1}[M(s)] &= M^{-1}\left[\frac{(n-1)!}{s^{n-3}}\right] - M^{-1}\left[\frac{(n-1)!}{s^{n-2}}\right], \quad x(t) = (n-1)t^{n-2} - t^{n-1}.
\end{aligned}$$

Преобразование Сави

$$f(x) \Rightarrow T(\mu)$$

$$T(\mu) = S[f(x)] = \frac{1}{\mu^2} \int_0^\infty f(x) e^{-\frac{x}{\mu}} dx. \quad (6)$$

$$S[x^\beta] = \mu^{\beta-1} \Gamma(\beta + 1), \quad S[f^{(n)}(x)] = \frac{T(\mu)}{\mu^n} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\mu^{n-k+1}}, \quad S^{-1}[\mu^\beta] = \frac{x^{\beta+1}}{\Gamma(\beta + 2)}.$$

Запишем решение уравнения (2), используя (6):

$$\begin{aligned}
&S[D^{\alpha+1}[x(t)] + D^\alpha[x(t)] + x'(t) + x(t)] = \\
&= S\left[\frac{(n-1)!}{\Gamma(n-2-\alpha)} t^{n-3-\alpha} - \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\alpha)} t^{n-1-\alpha} + (n^2 - 3n + 2)t^{n-3} - t^{n-1}\right], \\
&S[D^{\alpha+1}[x(t)]] + S[D^\alpha[x(t)]] + S[x'(t)] + S[x(t)] = \\
&= \frac{(n-1)!}{\Gamma(n-2-\alpha)} S[t^{n-3-\alpha}] - \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\alpha)} S[t^{n-1-\alpha}] + (n^2 - 3n + 2)S[t^{n-3}] - S[t^{n-1}],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mu^{-\alpha-1}T(\mu) + \mu^{-\alpha}T(\mu) + \mu^{-1}T(\mu) + T(\mu) = \\
&= \frac{(n-1)!}{\Gamma(n-2-\alpha)} \Gamma(n-2-\alpha) \mu^{n-4-\alpha} - \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\alpha)} \Gamma(n-\alpha) \mu^{n-2-\alpha} + (n^2 - 3n + 2)\Gamma(n-2) \mu^{n-4} - \Gamma(n) \mu^{n-2},
\end{aligned}$$

$$T(\mu)(\mu^{-\alpha-1} + \mu^{-\alpha} + \mu^{-1} + 1) = (n-1)! \mu^{n-4-\alpha} - \Gamma(n) \mu^{n-2-\alpha} + (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \mu^{n-4} - \Gamma(n) \mu^{n-2},$$

$$T(\mu)(\mu^{-\alpha} + 1)\mu(\mu^{-1} + 1) = (n-1)! \mu^{n-2} (\mu^{-\alpha-2} - \mu^{-\alpha} + \mu^{-2} - 1),$$

$$T(\mu)(\mu^{-\alpha} + 1)(\mu^{-1} + 1) = (n-1)! \mu^{n-2} (\mu^{-\alpha} + 1)(\mu^{-2} - 1),$$

$$T(\mu) = (n-1)! \mu^{n-2} (\mu^{-1} - 1), \quad T(\mu) = (n-1)! \mu^{n-3} - (n-1)! \mu^{n-2},$$

$$S^{-1}[T(\mu)] = S^{-1}[(n-1)! \mu^{n-3}] - S^{-1}[(n-1)! \mu^{n-2}], \quad x(t) = (n-1)t^{n-2} - t^{n-1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф.Б.М. Бельгасем. Представление и анализ свойств Сумуду. Нелинейные исследования, том 13, (2006), №1, 23-41.

2. Т.М. Эльзаки. Новое интегральное преобразование Elzaki Transform. Глобальный журнал чистой и прикладной математики ISSN 0973-1768, Том 7, № 1 (2011), стр. 57-64.

3. Т.М. Эльзаки, С.М. Эльзаки, Э.М.А. Хилала. Преобразования Эльзаки и Сумуду для решения некоторых дифференциальных уравнений. Глобальный журнал прикладной математики, 2012; №8 (2): 167-73.

4. Х. Ким. Теорема о сдвиге во времени и свертка для преобразования Эльзаки. Международный журнал чистой и прикладной математики, 2013.

5. М.М. Абдельрахим Махгуб. Новое интегральное преобразование Моханда, теоретико-прикладная математика; 2017, 12 (2): 113-20.

6. Ф.Б.М. Белгасем, А.А. Карабалли и С.Л. Калла. Аналитические исследования преобразования Сумуду и приложения к интегральным производственным уравнениям. Математические проблемы в технике, (2003) №3, 103-118.

7. Р. Черчилль. Операционная математика. (3-е издание), Макгроу-Хилл, Нью-Йорк.

УДК 517.5

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕНИЙ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА НА ОТРЕЗКЕ, ОСНОВАННОМ НА СУММАХ ФУРЬЕ – ЧЕБЫШЕВА

П.Г. Поцейко
Гродненский госуниверситет им. Я. Купалы
Гродно, Республика Беларусь

Аннотация: исследуются приближения на отрезке $[-1, 1]$ сингулярных интегралов вида

$$\hat{f}(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{t-x} \sqrt{1-t^2} dt. \quad x \in [-1, 1],$$

образом частичных сумм ряда Фурье – Чебышёва при преобразовании изучаемым сингулярным интегралом.

Устанавливается интегральное представление приближений. Рассматривается случай, когда плотность сингулярного интеграла имеет степенную особенность на отрезке $[-1, 1]$. Получено интегральное представление приближений, оценки поточечных и равномерных приближений, асимптотические оценки равномерных приближений.

Ключевые слова: сингулярные интегралы на отрезке, суммы Фурье–Чебышёва, равномерные оценки, асимптотические оценки, метод Лапласа.

1. Введение. При решении теоретических и прикладных задач математики, и физики встречаются сингулярные интегралы с ядром типа Коши следующего вида:

$$\hat{f}(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{t-x} \sqrt{1-t^2} dt, \quad x \in [-1, 1], \quad (1)$$

понимаемые в смысле главного значения по Коши. Для существования последних достаточно, чтобы плотность $f(t)$ удовлетворяла условию Липшица любого порядка [1, 2].

Хорошо известно, что вычисление точного значения таких интегралов, т.е. в замкнутой форме, удается достичь лишь в очень редких частных случаях. Поэтому важное значение имеет разработка приближенных методов.

Исследования сингулярных интегралов вида (1) при помощи методов численного анализа хорошо известны [3–7]. В работе Б. Г. Габдулхаева [8] содержится достаточно полный обзор результатов в этом направлении. В. П. Моторный [9] получил асимптотически точные оценки поточечных приближений алгебраическими многочленами классов функций, которые задаются сингулярными интегралами вида (1). Рациональные аппроксимации сингулярных интегралов вида (1), когда плотность $f(t)$ принадлежит различным функциональным классам, изучались В. Н. Русаком и его учениками [10–12]. Вместе с тем в указанных выше работах не использовались классические методы, основанные на рядах Фурье.

Методы приближений непрерывных функций на отрезке $[-1, 1]$ рядами Фурье – Чебышёва

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n T_n(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (2)$$

где

$$T_n(x) = \cos n \arccos x, \quad c_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)T_n(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и различными методами их суммирования, нашли широкое применение в теории аппроксимации [13–17].

Введем в рассмотрение оператор

$$\hat{s}_{n+1}(f, x) = \int_{-1}^{+1} \frac{s_n(f, t)}{t-x} \sqrt{1-t^2} dt, \quad x \in [-1, 1], \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

где $s_n(f, t)$ – частичная сумма ряда Фурье – Чебышёва (2).

Интеграл справа в (3) является сингулярным и понимается в смысле главного значения по Коши. Нетрудно показать, что $\hat{s}_{n+1}(f, x)$ представляет собой полином степени не выше $n+1$. Представляет интерес изучить приближения сингулярных интегралов вида (1) полиномиальными интегральными операторами (3), ассоциированными с частичными суммами ряда Фурье – Чебышёва (2).

2. Интегральное представление приближений. Введем обозначения

$$\hat{\varepsilon}_{n+1}(f, x) = \hat{f}(x) - \hat{s}_{n+1}(f, x), \quad x \in [-1, 1], \quad (4)$$

$$\hat{\varepsilon}_{n+1}(f) = \|\hat{f}(x) - \hat{s}_{n+1}(f, x)\|_{C[-1, 1]}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1. Для приближений сингулярного интеграла (1) на отрезке $[-1, 1]$ оператором (3) справедливо интегральное представление

$$\hat{\varepsilon}_{n+1}(f, x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos \tau) \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)(\tau - \theta)}{\sin \frac{\tau - \theta}{2}} d\tau, \quad x = \cos \theta.$$

Интеграл является сингулярным и понимается в смысле главного значения по Коши.

3. Приближения сингулярного интеграла с плотностью, удовлетворяющей условию Липшица. Установим оценку сверху величины $\hat{\varepsilon}_{n+1}(f, x)$ в зависимости от положения точки x на отрезке $[-1, 1]$ при условии, что плотность $f \in H^{(\alpha)}[-1, 1]$, то есть удовлетворяет на отрезке $[-1, 1]$ условию Липшица порядка α с константой равной единице. Для доказательства следующего результата воспользуемся методами, предложенными О. В. Бесовым [18, 19].

Теорема 2. Для приближений (4) сингулярного интеграла (1) с плотностью $f \in H^{(\alpha)}[-1, 1]$, $\alpha \in (0, 1]$, на отрезке $[-1, 1]$ интегральным оператором (3) справедливы оценки сверху $|\hat{\varepsilon}_{n+1}(f, x)|$

$$\leq \pi^{2\alpha+1} \sqrt{1-x^2} \begin{cases} 2 \left(\sqrt{1-x^2}\right)^\alpha \frac{\ln n}{\pi^\alpha n^\alpha} + \frac{|x|^\alpha}{2\alpha n^\alpha} + \frac{\ln n}{2^{1+\alpha} n^{2\alpha}}, & \alpha \in (0, 1), \\ \sqrt{1-x^2} \frac{\ln n}{n} + \frac{|x|}{2n} + \frac{\ln n}{4n^2}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Замечание 1. Важно отметить, что оценки (6) зависят от положения точки x на отрезке $[-1, 1]$. Причем приближения на концах отрезка имеют большую скорость убывания, чем в целом на отрезке.

4. Приближения сингулярного интеграла с плотностью, имеющей степенную особенность. Изучим величину $\hat{\varepsilon}_{n+1}(f, x)$ в случае, когда плотность сингулярного интеграла (1) имеет вид $f_s(t) = |t|^s$, $s \in (0, +\infty)$. Другими словами, изучаются аппроксимации функций класса

$$\hat{f}_s(x) = 2x \int_0^1 \frac{t^s}{t^2 - x^2} \sqrt{1-t^2} dt, \quad t \in [-1, 1].$$

Теорема 3. Для приближений сингулярного интеграла $\hat{f}_s(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ интегральным оператором (3) имеют место:

1) интегральное представление:

$$\hat{\varepsilon}_{2n+1}(|\cdot|^s, x) = (-1)^n \frac{\sqrt{1-x^2}}{2^{s-2}} \sin \frac{\pi s}{2} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{2n+1-s}}{\sqrt{1+2t^2 \cos 2\theta + t^4}} \sin \psi_n(t, x) dt,$$

где

$$\psi_n(t, x) = (2n+2)\theta - \arg(1+t^2\xi^2), \quad \xi = e^{i\theta}, \quad x = \cos \theta;$$

2) поточечная оценка сверху:

$$|\hat{\varepsilon}_{2n+1}(|\cdot|^s, x)| \leq \frac{\sqrt{1-x^2}}{2^{s-2}} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{2n+1-s}}{\sqrt{1+2t^2 \cos 2\theta + t^4}} dt; \quad (5)$$

3) равномерно по $x \in [-1, 1]$ оценка сверху

$$\hat{\varepsilon}_{2n+1}(|\cdot|^s) \leq \sqrt{1-x^2} \hat{\varepsilon}_{2n+1}^*(|\cdot|^s), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

где

$$\hat{\varepsilon}_{2n+1}^*(|\cdot|^s) = \frac{1}{2^{s-2}} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_0^1 (1-t^2)^{s-1} t^{2n+1-s} dt;$$

4) асимптотическая оценка мажоранты равномерных приближений:

$$\varepsilon_{2n+1}^*(|\cdot|^s) \sim \frac{1}{2^{s-1}} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \frac{\Gamma(s)}{n^s}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (7)$$

где $\Gamma(s)$ – гамма-функция Эйлера.

Оценки (5) и (6) являются точными. Равенство достигается на концах отрезка.

Замечание 2. Для получения асимптотического равенства (7) существенным образом использовался метод Лапласа [20, 21] исследования асимптотического поведения интегралов.

Заключение. В работе изучены приближения на отрезке $[-1, 1]$ сингулярных интегралов вида (1) интегральными операторами, которые представляют собой образы частичных сумм ряда Фурье – Чебышёва при преобразовании изучаемым сингулярным интегралом. Установлено интегральное представление приближений.

В случае, когда плотность сингулярного интеграла удовлетворяет условию Липшица порядка α , установлены оценки приближений, зависящие от положения точки на отрезке $[-1, 1]$.

В случае, когда плотность имеет степенную особенность, найдены оценки поточечных приближений, в некотором смысле равномерных приближений с определенной мажорантой, и асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1958, 543 с.

2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд. М.: Наука, 1968, 513 с.

3. Elliott D., Paget D. On the convergence of a quadrature rule for evaluating certain Cauchy principal value integrals // Numer. Math., 1975, Vol. 23, № 4, P. 311–319.

4. Шешко М.А. О сходимости квадратурных процессов для сингулярного интеграла // Изв. вузов. Матем., 1976, № 12, С. 108–118.

5. Хубежты Ш.С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов с ядром Коши // Владикавказский матем. Жур., 2008, Т. 10, № 4, С. 61–75.

6. Хубежты Ш.С., Цуцаев А.О. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов, имеющих почти гауссовскую степень

точности // Изв. вузов. Северокавказский регион. Естественные науки, 2015, № 2, С. 53–57.

7. Саакян А.В. Квадратурные формулы типа Гаусса для сингулярных интегралов // В сб.: “Проблемы механики тонких деформируемых тел”, посв. 80-летию акад. С.А. Амбарцумяна. Ереван, 2002, С. 259–265.

8. Габдулхаев Б.Г. Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Сер. Мат. Анал, 1980, Т. 18, С. 251–307.

9. Моторный В.П. Приближение некоторых классов сингулярных интегралов алгебраическими многочленами // Укр. мат. жур., 2001, Т. 53, № 3, С. 331–345.

10. Русак В.Н. Равномерная рациональная аппроксимация сингулярных интегралов // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук, 1993, № 2, С. 22–26.

11. Бокша А.Н. Приближение сингулярных интегралов рациональными функциями в равномерной метрике // Вестн. Бел. гос. ун-та. Сер. 1, Физ. Мат. Инф., 1997, № 3, С. 68–71.

12. Русак В.Н., Уазис А.Х. Рациональная аппроксимация сингулярных интегралов с дифференцируемой плотностью // Изв. БГПУ. Сер 3. Физ. Матем. Инф. Биол. Геогр., 2009, № 1(59), С. 8–11.

13. Никольский С.М. О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1946, Т. 10, вып. 4, С. 295–322.

14. Тиман А.Ф. Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица, обыкновенными многочленами // ДАН СССР, 1951, Т. 77, № 6, С. 969–972.

15. Ганзбург И.М. Обобщение некоторых результатов С.М. Никольского и А.Ф. Тимана // ДАН СССР, 1957, Т. 116, № 5, С. 727–730.

16. Ганзбург И.М., Тиман А.Ф. Линейные процессы приближения функций, удовлетворяющих условию Липшица, алгебраическими многочленами // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, Т. 22, вып. 6, С. 771–810.

17. Русецкий Ю.И. О приближении непрерывных на отрезке функций суммами Абеля – Пуассона // Сиб. Матем. жур., 1968, Т. 9, № 1, С. 136–144.

18. Бесов О.В. Оценка приближения периодических функций суммами Фурье // Матем. заметки, 2006, Т. 79, вып. 5, С. 784–787.

19. Бесов О.В. Лекции по математическому анализу. – 4-е изд., испр. и доп. М.: Физматлит, 2020, 476 с.

20. Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979, 320 с.

21. Федорюк М.В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Гл. ред. Физмат литературы, 1987, 544 с.

УДК 517.946

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МНОГООБРАЗИЯ РЕШЕНИЙ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНОЙ ЛИНИЕЙ В ПЕРВОМ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ ($\mu = -(4m - 3)$)

Н.Р. Раджабов, К.С. Болтаев
Таджикский национальный университет,
Душанбе, Таджикистан

Аннотация: в данной работе для уравнения (1) в области Π в первом исключительном случае получены представление многообразия решений в виде рядов, также выяснены корректная постановка задач и найдены решения поставленных задач.

Ключевые слова: многообразия решений, уравнение четвёртого порядка, сингулярная линия, исключительные случаи.

В работе рассматривается уравнение следующего вида

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\mu \operatorname{sgny}}{|y|} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0, \mu = -(4m - 3), \quad (1)$$

в области $\Pi = \Pi^+ \cup \Pi^-$, $\Pi^+ = \{(x, y): -\infty < x < \infty, 0 < y < \infty\}$,

$\Pi^- = \{(x, y): -\infty < x < \infty, -\infty < y < 0\}$.

Случаев

$$\mu = -(4m - 3), \mu = -(4m - 2), \mu = -(4m - 1), \mu = 4m + 1, \\ \mu = 4m + 2, \mu = 4m + 3, \text{ где } m > 0$$

- целое число, будем называть соответственно первым, вторым, третьим, четвёртым, пятым и шестым исключительными случаями уравнения (1).

В данной работе для уравнения (1) в области Π в первом исключительном случае получены представление многообразия решений в виде рядов, а также выяснена корректная постановка задачи и найдено решение поставленных задач.

Введем следующие обозначения:

$A_\alpha(\Pi)$ -класс функций $u(x, y)$, представленных в виде

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) |y|^{k+\alpha}, \alpha = \text{const}$$

и при $|y| \rightarrow \infty$ имеющих порядок $|y|^\alpha O(\exp \frac{y^4}{4})$, где $u_k(x)$ бесконечно-дифференцируемые функции.

Через B^∞ обозначим класс функций $f(x)$ имеющих непрерывные производные любого порядка, все производные которых ограничены одной константой.

Решение уравнения (1), которое выражается линейно через три произвольные функции класса B^∞ и $4m$ произвольные постоянные, назовем решением класса $W|_3^{4m}(\Pi)$.

Доказаны следующие утверждения:

Теорема 1. Любое решение уравнения (1) из класса $A_0(\Pi)$, при $\mu = -(4m - 3), m > 0$ – целое число, представимо в виде

$$u_1(x, y) = f_1(x) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{f_1^{(4k)}(x)}{4^{2k} k! \prod_{l=0}^{k-1} (4l + 2)(4l + 3)(m - l - 1)} y^{4k} = \equiv \Omega_1(f_1), \quad (2)$$

где $f_1^{(4k)}(x) = 0$, то есть

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{4m} C_i x^{i-1},$$

$C_1, C_2, C_3, \dots, C_{4m}$ – произвольные постоянные числа.

Теорема 2. Любое решение уравнения (1) из класса $A_1(\Pi)$, при $\mu = -(4m - 3), m > 0$ – целое число, представимо в виде

$$u_2(x, y) = |y| [f_2(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{f_2^{(4k)}(x)}{4^k k! \prod_{l=0}^{k-1} (4l + 3)(4l + 5)(4l + 5 - 4m)} y^{4k}] \equiv |y| \Omega_2(f_2), \quad (3)$$

где $f_2(x) \in B^\infty$.

Теорема 3. Любое решение уравнения (1) из класса $A_2(\Pi)$, при $\mu = -(4m - 3), m > 0$ – целое число, представимо в виде

$$u_3(x, y) = y^2 [f_3(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{f_3^{(4k)}(x)}{4^k k! \prod_{l=0}^{k-1} (4l+5)(4l+6)(4l+6-4m)} y^{4k}] \equiv y^2 \Omega_3(f_3), \quad (4)$$

где $f_3(x) \in B^\infty$.

Теорема 4. Любое решение уравнения (1) из класса $A_{4m}(\Pi)$, при $\mu = -(4m-3)$, $m > 0$ – целое число, представимо в виде

$$u_4(x, y) = y^{4m} [f_4(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{f_4^{(4k)}(x)}{4^k k! \prod_{l=0}^{k-1} (4l+2+4m)(4l+3+4m)(4l+4+4m)} y^{4k}] \equiv \equiv y^{4m} \Omega_4(f_4), \quad (5)$$

где $f_4(x) \in B^\infty$.

Теорема 5. Любое решение уравнения (1) из класса $W_3^{4m}(\Pi)$, при $\mu = -(4m-3)$, $m > 0$ – целое число, представимо в виде

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + u_4(x, y) = \Omega_1(f_1) + |y| \Omega_2(f_2) + y^2 \Omega_3(f_3) + y^{4m} \Omega_4(f_4) \quad (6)$$

где $f_1^{(4m)}(x) = 0$,

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{4m} C_i x^{i-1},$$

$C_1, C_2, C_3, \dots, C_{4m}$ – произвольные постоянные числа,

$$f_2(x), f_3(x), f_4(x) \in B^\infty.$$

Полученные представления многообразия решений уравнения (1) дают возможность в области Π решать следующие задачи.

Задача 1. Требуется найти решение уравнения (1) из класса $A_0(\Pi)$, при $\mu = -(4m-3)$, $m > 0$ – целое число, когда задано условие

$$u_1(x, \pm 0) = \psi_1(x),$$

где $\psi_1(x)$ – многочлен степени $4m-1$, с заданными коэффициентами $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{4m}$.

Задача 2. Требуется найти решение уравнения (1) из класса $A_0(\Pi)$, при $\mu = -(4m-3)$, $m > 0$ – целое число, когда заданы условия

$$\left. \frac{\partial^{i-1}(u_1(x, y))}{\partial x^{i-1}} \right|_{\substack{x=0 \\ y=\pm 0}} = b_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 4m,$$

где b_i – заданные постоянные числа.

Задача 3. Требуется найти решение уравнения (1) из класса $A_1(\Pi)$, при $\mu = -(4m-3)$, $m > 0$ – целое число, когда заданы условия

$$\lim_{|y| \rightarrow 0} (|y|^{-1} u_2(x, y)) = \psi_2(x),$$

где $\psi_2(x) \in B^\infty$.

Задача 4. Требуется найти решение уравнения (1) из класса $A_2(\Pi)$, при $\mu = -(4m - 3)$, $m > 0$ - целое число, когда задано условие

$$\lim_{|y| \rightarrow 0} (y^{-2} u_3(x, y)) = \psi_3(x),$$

где $\psi_3(x) \in B^\infty$.

Задача 5. Требуется найти решения уравнение (1) из класса $A_{4m}(\Pi)$, при $\mu = -(4m - 3)$, $m > 0$ - целое число, когда задано условие

$$\lim_{|y| \rightarrow 0} (y^{-4m} u_4(x, y)) = \psi_4(x),$$

где $\psi_4(x) \in B^\infty$.

Задача 6. Требуется найти решения уравнения (1) из класса $W_3^{(4m)}(\Pi)$, при $\mu = -(4m - 3)$, $m > 0$ - целое число, когда заданы условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{i-1}(u(x, y))}{\partial x^{i-1}} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=\pm 0}} &= a_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 4m, \\ (\pm \frac{\partial u}{\partial y}) \Big|_{y=\pm 0} &= \varphi_1(x), \quad (\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \Big|_{y=\pm 0} = \varphi_2(x), \\ (\frac{\partial^{4m} u}{\partial y^{4m}}) \Big|_{y=\pm 0} &= \varphi_3(x), \end{aligned}$$

где a_i - заданные постоянные числа, $\varphi_i(x) \in B^\infty$, $i = 1, 2, 3$.

Задачи (1) - (6) решаются с помощью представления (1) - (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Раджабов Н.Р. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями. - Душанбе, 1980, ч.1, 127 стр; 1981, ч.2, -170 стр.; 1982, ч. 3, -170 стр.; 1985, ч.4, -174 стр.

2. Болтаев К.С. Представление многообразия решений и краевые задачи типа Коши-Дирихле для одного модельных уравнений m - го порядка с сингулярной линией – дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения. Выпуск 7. Душанбе 1998.

3. Раджабов Н.Р., Болтаев К.С. Представление многообразия решений и краевые задачи типа Коши-Дирихле, типа Неймана для уравнения четвертого порядка с сингулярной линией. Материалы международной научной конференции “Современные проблемы

математики и её приложения.”, посвященной 75-летию ТНУ, 20-летию развития точных, естественных и математических наук 2020-2040 годы, 85-летию академика НАН РТ Раджабов Нусрат. Душанбе 2023.- С.-159-162.

УДК 514.763.3

РЕКУРРЕНТНЫЕ ПРИБЛИЖЕННО КЕЛЕРОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

А.Р. Рустанов, НИУ МГСУ, Москва
А.З. Салахов, ДГТУ, Махачкала

Аннотация: в статье получена полная локальная характеристика рекуррентных приближенно келеровых многообразий.

Ключевые слова: приближенно келерово многообразии, рекуррентное многообразии, келерово многообразии.

1. Введение

Понятие приближенно келерова многообразия является одним из наиболее интересных обобщений келерова многообразия. В 70-х – 80-х годах прошлого столетия это понятие вошло в сферу геометрических исследований и быстро привлекло внимание ряда ведущих геометров. Интерес к понятию приближенно келерова многообразия проявился после того, как в 1955 г. Фрелихер [1] доказал существование канонической почти эрмитовой структуры на шестимерной сфере S^6 , а Фуками и Исихара в [2] доказали, что фундаментальная форма этой структуры является формой Киллинга (т.е. ее ковариантный дифференциал является дифференциальной формой), что, очевидно, равносильно приближенной келеровости этой структуры. Наряду с термином «приближенно (nearly) келерово многообразии» используемым в работах А. Грея, Дж. Вольфа и др. и принявшее в настоящее время наибольшее распространение, использовались синонимы: «К-пространство» (С. Татибана, Й. Ватанабе, С. Кото, В.Ф. Кириченко и др.), а также «Почти татибаново пространство» (К. Яно, С. Ямагути, М. Мацумото и др.). Следует отметить также, что термины «nearly Kähler manifold» и «almost Kähler manifold», несмотря на идентичность русского перевода, обозначают различные объекты [3].

Римановы многообразия рекуррентной кривизны того или иного типа являются весьма популярным объектом изучения в дифференциальной геометрии. Это в значительной мере объясняется той существенной ролью, которую такие многообразия играют в общей теории относительности. Интерес к таким многообразиям возник в связи с известной задачей Адамара – возможно ли теорию гравитации и электростатики развить в духе законов Ньютона и Кулона в рамках римановой геометрии? Решение этой задачи привело к изучению гармонических римановых многообразий, которые Уолкер разделил на центрально-гармонические, вполне гармонические и простогармонические [4]. Хорошо известно, что двумерные и трехмерные простогармонические многообразия являются плоскими. Примеры неплоских четырехмерных простогармонических многообразий впервые были найдены Рузе [5]. Тензор кривизны этих многообразий оказался рекуррентным. Эта работа Рузе положила начало изучению многообразий с рекуррентным тензором римановой кривизны, или рекуррентных многообразий, которые Рузе назвал «каппа-пространствами». Отметим, что Рузе нашел полную классификацию трехмерных рекуррентных многообразий [6] и четырехмерных простогармонических рекуррентных многообразий [7].

Существование на римановом многообразии рекуррентного тензора типа (3,1) накладывает существенные ограничения на геометрию этого многообразия. Например, известно, что полное риманово многообразие с рекуррентным тензором кривизны является фактормногообразием односвязного симметрического пространства или многообразия типа $M^2 \times R^{n-2}$ по дискретной подгруппе группы изометрий (Вонг, [8]). Ряд авторов (Хасегава, Ямада и др.) изучали келеровы многообразия с рекуррентным тензором кривизны того или иного вида [9], [10].

В данной работе мы рассматриваем рекуррентные приближенно келеровы многообразия. Основным результатом является теорема 2: Рекуррентное приближенно келерово многообразие либо локально симметрично, либо локально изоморфно произведению комплексного евклидова пространства C^n и двумерного келерова многообразия. В случае односвязности многообразия, указанные изометрии являются глобальными.

2. Приближенно келеровы многообразия.

Определение 2.1 [11]. Почти эрмитовой (короче, AH -) структурой на многообразии M называется пара (J, g) , где J – почти комплексная структура на M , g – (псевдо) риманова метрика на M .

При этом

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle; X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Эндоморфизм J называется структурным эндоморфизмом.

Многообразие, на котором фиксирована почти эрмитова структура, называется почти эрмитовым (короче, AH -) многообразием.

Определение 2.2 [11]. Почти эрмитова структура на многообразии M называется приближенно (nearly) келеровой (короче, NK -) структурой, если на M выполняется тождество

$$\nabla_X(J)Y + \nabla_Y(J)X = 0; X, Y \in \mathcal{X}(M). \quad (2.1)$$

Напомним, что полная группа структурных уравнений приближенно келеровой структуры имеет вид [11]:

$$\begin{aligned} 1) \quad d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c; \\ 2) \quad d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c; \\ 3) \quad d\theta_b^a &= -\theta_c^a \wedge \theta_b^c + (A_{bc}^{ad} - 2B^{adh} B_{hbc}) \omega^c \wedge \omega_d, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\{A_{bc}^{ad}\}$ – глобально определенная система функций на пространстве присоединенной G -структуры, симметричная по верхним и нижним индексам, $\{B^{abc}\}, \{B_{abc}\}$ – глобально определенные системы функций на пространстве присоединенной G -структуры, служащие компонентами (комплексных) чистых тензоров на M , называемых структурными тензорами первого и второго рода. При этом структурные тензоры первого и второго рода кососимметричны и удовлетворяют следующим равенствам:

$$\begin{aligned} 1) \quad dB^{abc} + B^{hbc} \theta_h^a + B^{ahc} \theta_h^b + B^{abh} \theta_h^c &= B^{abcd} \omega_d; \\ 2) \quad dB_{abc} - B_{hbc} \theta_a^h - B_{ahc} \theta_b^h - B_{abh} \theta_c^h &= B_{abcd} \omega^d, \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь функции B^{abcd} и B_{abcd} определены глобально на пространстве присоединенной G -структуры. Более того, дифференциальное продолжение соотношений (2.3) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} 1) \quad dB^{abcd} + B^{hbcd} \theta_h^a + B^{ahcd} \theta_h^b + B^{abhcd} \theta_h^c + B^{abch} \theta_h^d &= B^{abcdh} \omega_h; \\ 2) \quad dB_{abcd} - B_{hbcd} \theta_a^h - B_{ahcd} \theta_b^h - B_{abhcd} \theta_c^h - B_{abch} \theta_d^h &= B_{abcdh} \omega^h, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\{B^{abcdh}, B_{abcdh}\}$ – глобально определенная система функций на пространстве присоединенной G -структуры, служащих компонентами второго ковариантного дифференциала альтернированного структурного тензора $Alt \tilde{C}$ с компонентами $\{B^{abc}, B_{abc}\}$.

Проводя процедуру дифференциального продолжения второй группы структурных уравнений получим:

$$dA_{bc}^{ad} + A_{bc}^{hd}\theta_h^a + A_{bc}^{ah}\theta_h^d - A_{hc}^{ad}\theta_b^h - A_{bh}^{ad}\theta_c^h = A_{bch}^{ad}\omega^h + A_{bc}^{adh}\omega_h, \quad (2.5)$$

причем

$$A_{b[ch]}^{ad} = A_{bc}^{a[dh]} = 0, \overline{A_{bch}^{ad}} = A_{ad}^{bch}. \quad (2.6)$$

Соотношение (2.5) показывает, что система $\{A_{bc}^{ad}\}$ на пространстве присоединенной G -структуры является системой компонент некоторого четырехвалентного тензора A на многообразии M . Этот тензор называется структурным тензором третьего рода или тензором голоморфной секционной (короче, HS -) кривизны приближенно келерова многообразия.

При этом получим следующие тождества [11]:

1) первое фундаментальное тождество

$$B^{ach}B_{hbadf} = 0; \quad (2.7)$$

2) второе фундаментальное тождество

$$A_{b[c}^{ad}B_{gf]d} - 2B^{adh}B_{hb[c}B_{gf]d} = 0; \quad (2.8)$$

3) третье фундаментальное тождество

$$A_{[g}^d B_{f]cd} - 2B_c^d B_{gfd} = 0, \quad (2.9)$$

где $A_c^d = A_{hc}^{hd}, B_c^d = B^{ghd}B_{ghc}$.

Замечание 1. Приближенно келерово многообразие является келеровым тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры $B^{abc} = B_{abc} = 0$. Не келерово приближенно келерово многообразие называется собственным приближенно келеровым многообразием.

Напомним, что для компонент формы римановой связности на пространстве присоединенной G -структуры имеем [11]:

$$1) \theta_{\hat{b}}^a = -B^{abc}\omega_c; \quad 2) \theta_{\hat{b}}^{\hat{a}} = -B_{abc}\omega^c. \quad (2.10)$$

Напомним, что ковариантные компоненты тензора Римана-Кристоффеля, на пространстве присоединенной G -структуры, имеют вид [11]:

$$\begin{aligned}
1) R_{abcd} &= -2B_{ab[cd]}; \\
2) R_{abc\hat{a}} &= R_{ab\hat{c}d} = R_{a\hat{b}cd} = R_{\hat{a}bcd} = 0; \\
3) R_{ab\hat{c}\hat{d}} &= R_{\hat{c}\hat{d}ab} = B^{cdh}B_{hab}; \\
4) R_{a\hat{b}\hat{c}\hat{d}} &= -R_{a\hat{b}\hat{d}\hat{c}} = -R_{\hat{b}a\hat{c}\hat{d}} = R_{\hat{b}a\hat{d}\hat{c}} = -A_{ac}^{bd} + B^{bdh}B_{nac}; \\
5) R_{a\hat{b}\hat{c}\hat{d}} &= -R_{\hat{b}a\hat{c}\hat{d}} = R_{\hat{c}\hat{d}a\hat{b}} = R_{\hat{c}\hat{d}\hat{b}a} = 0; \\
6) R_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}} &= -2B^{ab[cd]}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

3. Рекуррентные НК – многообразия.

Вычислим компоненты ковариантного дифференциала тензора Римана-Кристоффеля.

Продифференцируем соотношение (2.11:2):

$$dR_{bcd}^a = 0. \tag{3.1}$$

Используя Основную теорему тензорного анализа и равенства (2.11:2), перепишем это равенство в виде:

$$-R_{bcd}^{\hat{h}}\theta_{\hat{h}}^a + R_{\hat{h}cd}^a\theta_b^{\hat{h}} + R_{b\hat{h}d}^a\theta_c^{\hat{h}} + R_{bc\hat{h}}^a\theta_d^{\hat{h}} + R_{bcd,k}^a\omega^k, \tag{3.2}$$

или, с учетом (2.10) и (2.11):

$$\begin{aligned}
2B_{hb[cd]}B^{ahf}\omega_f + 2B^{ahg}B_{gcd}B_{hbf}\omega^f - (A_{bd}^{ah} - B^{ahg}B_{gbd})B_{hcf}\omega^f + \\
(A_{bc}^{ah} - B^{ahg}B_{gbc})B_{hdf}\omega^f + R_{bcd,k}^a\omega^k = 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

В силу первого фундаментального тождества первое слагаемое равно нулю, тогда

$$\begin{aligned}
R_{bcd,f}^a\omega^f + R_{bcd,\hat{k}}^a\omega_{\hat{k}} = \{(A_{bd}^{ah} - B^{ahg}B_{gbd})B_{hcf} - (A_{bc}^{ah} - B^{ahg}B_{gbc})B_{hdf} - \\
2B^{ahg}B_{gcd}B_{hbf}\}\omega^f
\end{aligned} \tag{3.4}$$

В силу линейной независимости базисных форм имеем:

$$\begin{aligned}
1) R_{bcd,f}^a &= (A_{bd}^{ah} - B^{ahg}B_{gbd})B_{hcf} - (A_{bc}^{ah} - B^{ahg}B_{gbc})B_{hdf} - \\
&\quad 2B^{ahg}B_{gcd}B_{hbf} \\
2) R_{bcd,\hat{f}}^a &= 0.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

С учетом второго фундаментального тождества равенство 1) можно записать в виде:

$$R_{bcd,f}^a = A_{bf}^{ah} B_{hcd} + B^{agh} (B_{gbd} B_{hfc} - B_{gbc} B_{hfd}). \quad (3.6)$$

Аналогично, дифференцируя остальные соотношения (2.11), получим:

$$\begin{aligned} R_{bc\hat{a},f}^a &= 0; R_{bc\hat{a},\hat{f}}^a = -A_{bh}^{af} B^{hcd} - B_{bgh} (B^{gad} B^{hfc} - B^{gac} B^{hfd}); \\ R_{bc\hat{a},f}^a &= A_{bcf}^{ad}; R_{bc\hat{a},\hat{f}}^a = A_{bc}^{adf}; R_{bc\hat{a},f}^a = -A_{bdf}^{ac}; R_{bc\hat{a},\hat{f}}^a = -A_{bd}^{acf}; \\ R_{bc\hat{a},f}^{\hat{a}} &= -A_{af}^{bh} B_{hcd} - B^{bgh} (B_{gad} B_{hfc} - B_{gac} B_{hfd}); \\ R_{bc\hat{a},\hat{f}}^{\hat{a}} &= 0; R_{bc\hat{a},f}^{\hat{a}} = A_{ah}^{bf} B^{hcd} + B_{agh} (B^{gbd} B^{hfc} - B^{gbc} B^{hfd}); R_{bc\hat{a},\hat{f}}^{\hat{a}} = 0; \\ R_{bc\hat{a},f}^{\hat{a}} &= -A_{acf}^{bd}; R_{bc\hat{a},\hat{f}}^{\hat{a}} = -A_{ac}^{bdf}; R_{bc\hat{a},f}^{\hat{a}} = A_{adf}^{bc}; R_{bc\hat{a},\hat{f}}^{\hat{a}} = A_{ad}^{bcf}; \\ R_{bc\hat{a},f}^a &= A_{ch}^{df} B^{hab} + B_{cgh} (B^{gda} B^{hfb} - B^{gbd} B^{hfa}); R_{bc\hat{a},\hat{f}}^a = 0; \\ R_{bc\hat{a},f}^a &= -A_{ah}^{cf} B^{hab} - B_{dgh} (B^{gca} B^{hfb} - B^{gbc} B^{hfa}); R_{bc\hat{a},\hat{f}}^a = 0; \\ R_{bc\hat{a},f}^a &= 0; R_{bc\hat{a},\hat{f}}^a = 0; R_{bc\hat{a},f}^{\hat{a}} = 0; R_{bc\hat{a},\hat{f}}^{\hat{a}} = -2B^{ab[cd]f}; R_{bc\hat{a},f}^{\hat{a}} = 0; \\ R_{bc\hat{a},f}^{\hat{a}} &= -A_{cf}^{dh} B_{hab} - B^{dgh} (B_{gca} B_{hfb} - B_{gbc} B_{hfa}); R_{bc\hat{a},\hat{f}}^{\hat{a}} = 0; \\ R_{bc\hat{a},f}^{\hat{a}} &= A_{df}^{ch} B_{hab} + B^{cgh} (B_{gda} B_{hfb} - B_{gbd} B_{hfa}); R_{bc\hat{a},\hat{f}}^{\hat{a}} = 0; R_{bc\hat{a},f}^{\hat{a}} = 0; \\ R_{bc\hat{a},f}^{\hat{a}} &= -2B_{ab[cd]f}; R_{bc\hat{a},\hat{f}}^{\hat{a}} = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Определение 3.1 [12]. Риманово многообразие M называется рекуррентным, если для его тензора R кривизны выполнено соотношение

$$\nabla R = r \otimes R, \quad (3.8)$$

где r – ковариантный вектор на M . Случай $r \neq 0$ называется нетривиальным.

Пусть теперь M – рекуррентное приближенно келерово многообразие.

Теорема 1. Рекуррентное собственное приближенно келерово многообразие является симметричным.

Доказательство. Так как $R_{bc\hat{a},f}^a = 0$, то

$$0 = R_{bc\hat{a},f}^a = r_f \cdot R_{bc\hat{a}}^a = r_f B^{abh} B_{hcd}, \text{ т.е.}$$

$$r_f B^{abh} B_{hcd} = 0. \quad (3.9)$$

Из полученного равенства, поскольку для собственного приближенно келерова многообразия $B^{abh} \neq 0$, следует, что $r_f = 0$, т.е. многообразии является симметричным.

Теорема 2. Рекуррентное приближенно келерово многообразии либо локально симметрично, либо локально изоморфно произведению комплексного евклидова пространства \mathbb{C}^n и двумерного келерова многообразия. В случае односвязности многообразия, указанные изометрии являются глобальными.

Доказательство. Мы показали выше, что рекуррентное собственное приближенно келерово многообразии является симметричным, поэтому пусть M – келерово многообразии, т.е. $B^{abc} = B_{abc} = 0$. Тогда равенство (2.11:4) примет вид $R_{bc\hat{a}}^a = A_{bc}^{ad}$. Равенство $R_{bc\hat{a},f}^a = r_f \cdot R_{bc\hat{a}}^a$, с учетом (3.7) и (2.11), запишется в виде:

$$A_{bc\hat{h}}^{ad} = r_h A_{bc}^{ad}. \quad (3.10)$$

Проальтернируем полученное равенство по индексам c и h , с учетом (2.6), получим

$$r_h A_{bc}^{ad} = r_c A_{bh}^{ad}. \quad (3.11)$$

Выберем A -репер так, чтобы $r_c = r\delta_c^1$. Тогда если $h \neq 1$, то $0 = r_h A_{b1}^{ad} = r_1 A_{bh}^{ad}$. Отсюда:

- 1) либо $r_1 = 0$, тогда M – локально симметрическое многообразии.
- 2) либо $A_{bh}^{ad} = 0$ ($h \neq 1$). С учетом свойств симметрии и сопряженности тензора голоморфной секционной кривизны имеем $A_{bh}^{ad} = A\delta_1^a\delta_1^d\delta_b^1\delta_c^1$, где A – некоторая функция на пространстве присоединенной G -структуры. Продифференцировав внешним образом соотношение $A_{\alpha 1}^{11} = A\delta_\alpha^1$ ($\alpha = 2, 3, \dots, \frac{1}{2}\dim M$), получим, что либо $A_{11}^{11} = 0$, либо $\theta_\alpha^1 = 0$. В первом случае $A_{bh}^{ad} = 0$, т.е. многообразии M – плоское келерово многообразии, а значит, локально голоморфно изометрично комплексному евклидову пространству \mathbb{C}^n , снабженному стандартной эрмитовой метрикой $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle = ds^2$, в каноническом атласе задаваемой соотношением $ds^2 = \sum_{a=1}^n dz^a d\bar{z}^a$. Во втором случае структурные уравнения распадутся на группу

двумерной келеровой структуры и евклидовой структуры. В случае односвязности, указанные изометрии являются глобальными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Frölicher A. Sur differentialgeometrie der komplexen structures. Math. Ann., vol. 129, 1955, p. 50-95.
2. Fukamy T., Ishihara S. Almost Hermitian structure on S^6 . Tôhoku Math. J., vol. 17, 1955, p. 151 – 156.
3. Gray A. Vector cross products on manifolds. Trans. Amer. Math. Soc., 1969, 141, July, 465 – 504.
4. Walker A.G. Symmetric harmonic spaces. – Journ. Lond. Math. Soc., 1964, v. 21, p. 47-81.
5. Ruse H.S. On simply harmonic spaces. Journ. Lond. Math. Soc., 1946, v. 21, p. 243-268.
6. Ruse H.S. Three-dimensional spaces of recurrent curvature. Proc. Lond. Math. Soc. (ser. 2), 1949, v. 50, №6, p. 375-393.
7. Ruse H.S. On simply harmonic «kappa-spaces» of four dimensions. Proc. Lond. Math. Soc. (ser. 2), 1948, v. 50, p. 317-329.
8. Wong Y-G. Recurrent tensors on linearly connected differentiable manifold. Trans. Amer. Math. Soc., 1961, v. 99, p. 325-341.
9. Hasegava J. H-projective recurrent Kählerian manifolds and Bochner recurrent Kählerian manifolds. Hokkaido Math. J., 1974, v.3, p. 271-278.
10. Yamada T. On a certain recurrent space and HP-transformation in a Kählerian manifold. J. Asahikawa Techn. Coll., 1976, v.13, p. 103-109.
11. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Издание второе, дополненное. – Одесса: «Печатный Дом». – 2013 г., 458 с.
12. Кобаяши Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1-2, Москва, Наука, 1981.

УДК 517.956

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Р.Р. Сафиуллова
УУНиТ, Уфа

Аннотация: в статье рассмотрена нелинейная обратная краевая задача для псевдогиперболического уравнения, приведена теорема существования регулярных решений.

Ключевые слова: обратная задача, псевдогиперболическое уравнение, интегральное переопределение.

Пусть Ω есть ограниченная область пространства R^n с гладкой (бесконечно дифференцируемой) границей Γ , Q - цилиндр $\Omega \times (0, T)$ конечной высоты T , $S = \Gamma \times (0, T)$, $u_1(x)$ - заданная функция, определенная при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$, A - заданное положительное число.

Определим линейное пространство V :

$$V = \left\{ v(x, t) : v(x, t), v_t(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega)), v_{tt}(x, t) \in L_2(Q), \right. \\ \left. v_{x_i tt}(x, t) \in L_2(Q), \Delta v_{tt}(x, t) \in L_2(Q) \right\}.$$

Норма в пространстве определяется следующим образом

$$\|v\|_V^2 = \|v\|_{L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega))}^2 + \|v_t\|_{L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega))}^2 + \|v_{tt}\|_{L_2(Q)}^2 \\ + \|\Delta v_{tt}\|_{L_2(Q)}^2 + \|v_{x_i tt}\|_{L_2(Q)}^2.$$

Рассмотрим следующую обратную задачу: найти функцию $u(x, t)$ и число a , связанные в цилиндре Q уравнением

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + au = 0, \quad (1)$$

при выполнении для функции $u(x, t)$ условий

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(x, t)|_S = 0, \quad (3)$$

$$\int_{\Omega} u^2(x, T) dx = A. \quad (4)$$

Здесь условия (2) и (3) есть обычные условия первой начально-краевой задачи, условие же (4) – условие переопределения.

Разрешимость данной обратной задачи доказывается путем сведения ее к вспомогательной первой начально-краевой задаче для некоторого нелинейного интегро-дифференциального уравнения высокого порядка.

Введем ряд обозначений:

$$B = \int_{\Omega} u_1^2(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{1x_i}^2(x) dx, \quad B_1 = \frac{1}{A}, \quad B_0 = B \cdot B_1, \quad \beta = \frac{B_1}{B_0}.$$

Следует отметить, что для любой функции $\varphi(x)$ из пространства $W_2^1(\Omega)$ справедливо неравенство:

$$\int_{\Omega} \varphi^2(x) dx \leq m_0 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \varphi_{x_i}^2(x) dx,$$

где m_0 определяется лишь область Ω .

Определим срезывающую функцию $G_N(\varepsilon)$ для фиксированного числа $N > 0$:

$$G_N(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{если } 0 \leq \varepsilon \leq N, \\ N, & \text{если } \varepsilon > N, \\ 0, & \text{если } \varepsilon < 0. \end{cases}$$

Для фиксированной функции $v(x, t)$ из пространства $W_2^2(\Omega)$ положим

$$\Phi(v) = \int_{\Omega} v_t^2(x, T) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_{x_i}^2(x, T) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_{x_i}^2(x, T) dx.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + [B_0 - B_1 \cdot G_{\beta}(\Phi(u))]u = 0, \quad (5)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2), (3).

Разрешимость вспомогательной задачи (2), (3), (5) устанавливается с помощью применения метода срезов, метода неподвижной точки. С помощью решения вспомогательной задачи строится решение обратной задачи. Доказывается теорема существования регулярных решений.

Теорема. Пусть $u_1(x) \in W_2^2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega)$. Тогда краевая задача (1)

- (4) имеет решение $\{u(x, t), a\}$, такое, что

$$u(x, t), u_t(x, t) \in L_{\infty}(0, T; W_2^2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega)),$$

$$u_{tt}(x, t) \in L_{\infty}(0, T; L_2(\Omega)), \Delta u_t(x, t) \in L_2(Q), u_{x_i tt}(x, t) \in L_2(Q),$$

$$\Delta u_{tt}(x, t) \in L_2(Q), \quad i = 1, 2, \dots, n, a \geq 0.$$

Следует отметить, что близкая по постановке обратная задача рассматривалась в работе [1], исследовался более общий случай с ненулевой правой частью в уравнении (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кожанов А.И., Сафиуллова Р.Р. Об одном классе псевдогиперболических уравнений с неизвестным коэффициентом. Челябин. Физ.-матем. Журн., 2022, том 7, выпуск 2, 164-180.

2. Kozhanov A.I. Composite Type Equation and Inverse Problems. Utrecht: VSP, 1999.

УДК 004.421

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ OPENMP И ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ИЗ СТАНДАРТНОЙ БИБЛИОТЕКИ C++

Э.В. Селимханов
НИИ РН-БашНипиНефть, Уфа

Аннотация: данная статья представляет собой сравнительный анализ двух подходов к параллельному программированию: использование OpenMP [2] и параллельных алгоритмов из стандартной библиотеки C++ [3] с использованием Intel Threading Building Blocks [5]. В качестве конкретного примера исследования рассматривается задача обработки данных из непрерывного в памяти контейнера. Результаты исследования позволяют сделать выводы о преимуществах и недостатках каждого из методов при решении данной задачи, а также оценить их применимость в различных сценариях параллельного программирования.

Ключевые слова: C++, OpenMP, параллельные вычисления, Intel Threading Building Blocks, векторизация, C++ Standard Library.

Intel Threading Building Blocks (ТБВ) и OpenMP представляют собой две широко используемые библиотеки для параллельного программирования в среде языка C++. ТБВ разработана компанией Intel и предоставляет высокоуровневый интерфейс для создания параллельных приложений. Она включает в себя широкий спектр параллельных алгоритмов и структур данных, обеспечивая разработчикам простой и эффективный способ реализации параллельных вычислений.

OpenMP, с другой стороны, является открытым стандартом для параллельного программирования, поддерживаемым многими компиляторами и средами разработки. Он предоставляет набор директив препроцессора [1], функций и переменных среды, которые

позволяют распараллеливать участки кода на основе набора правил и соглашений, обеспечивая простой способ добавления параллелизма к существующему коду.

В качестве примера рассмотрим базовый алгоритм прохода по некоторому контейнеру (непрерывному в памяти) и применения вычислительно емкой функции к каждому его элементу. В качестве контейнера можно взять `std::vector` [3], предварительно заполнив его случайными числами, используя вихрь Мерсенна [4], следующим образом

```
template<class Container>
auto generate_container(
    std::size_t size,
    typename Container::value_type min_v,
    typename Container::value_type max_v
) {
    Container c(size);
    std::random_device rd;
    std::mt19937 gen(rd());
    std::uniform_real_distribution<double>dis(min_v, max_v);

    for (auto &el : c) {
        el = dis(gen);
    }
    return c;
}

Функция вычислений будет следующей
auto calc(double d) {
    return std::pow(d, 2) * std::sin(d) * std::sqrt(d) /      std::exp(d + 1);
}
```

Тест производительности проведем на массиве из 10000000 случайных чисел с двойной плавающей точностью. Замер времени исполнения производится с помощью `std::chrono::steady_clock::now()`[3]. Вычисления производятся на машине с Intel Core i5 12600k на Ubuntu 23.10 с помощью GCC 13.2.0.

Ниже представлен фрагмент кода тестов

```
constexpr int size = 10'000'000;
constexpr double min_d = -1'000'000.0, max_d = 1'000'000.0;
```

```

auto v1 = generate_container<std::vector<double>>(size, min_d, max_d);
auto v2 = v1, v3 = v1, v4 = v1;

// regular
auto start = std::chrono::steady_clock::now();
for (auto it = v1.begin(), end_it = v1.end(); it != end_it; ++it) {
    *it = calc(*it);
}

// openmp
#pragma omp parallel for
for (std::size_t i = 0; i < v2.size(); ++i) {
    v2[i] = calc(v2[i]);
}

// execution::par
std::for_each(std::execution::par, v3.begin(), v3.end(), [](auto &el) { el =
calc(el); });

// execution::par_unseq
std::for_each(std::execution::unseq, v5.begin(), v5.end(), [](auto &el) { el =
calc(el); });

```

Мы получаем следующие результаты (в микросекундах):

Regular	219818 us
OpenMP	57411 us
Parallel TBB	37510 us
Parallel Unsequence TBB	24685 us

По итогам проведенного теста, в котором мы сравнивали скорость выполнения операции прохода по вектору и применения функции к каждому его элементу, библиотека Intel Threading Building Blocks (ТВВ) продемонстрировала превосходство над другими подходами. Особенно выделяется эффективность режима параллельной неупорядоченной (par_unseq) обработки данных, который позволяет ТВВ использовать неупорядоченные вычисления в многопоточной среде.

В результате, наше исследование подтвердило эффективность библиотеки Intel Threading Building Blocks (ТВВ) в контексте

параллельного программирования на языке C++. Результаты теста явно демонстрируют преимущество ТВВ перед другими подходами, особенно в режиме параллельной неупорядоченной обработки данных.

Однако следует отметить, что выбор между различными библиотеками и подходами для параллельного программирования должен основываться на конкретных требованиях проекта и характеристиках задачи. В некоторых сценариях использование OpenMP (например, в сценарии использования reduction) или других инструментов может быть более подходящим вариантом.

Наше исследование подчеркивает важность выбора подходящего инструмента для каждой конкретной задачи параллельного программирования, а также необходимость дальнейшего изучения и оптимизации существующих библиотек и методов для достижения максимальной производительности, и эффективности при разработке параллельных приложений на платформе C++.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stroustrup B. The C++ Programming Language, 4th Edition. Addison-Wesley. - 2013 – 1361 с.
2. Антонов А.С. Параллельное программирование с использованием технологии OpenMP. — Москва: МГУ, 2009. — 728 с.
3. Джосаттис Н. Стандартная библиотека C++, 2-е изд.: Пер с англ. – М.: ООО “И.Д. Вильямс”, 2014. – 1136 с.
4. Josuttis N. C++20 – The Complete Guide. The LeanPub, 2022 – 762 с.
5. М. Восс, Р. Асенхо, Дж. Рейндерс. Параллельное программирование на C++ с помощью библиотеки ТВВ. – М.: ДМК Пресс, 2020. – 674 с.

УДК 621.31(075.8)

ПРОБЛЕМЫ ВЫБОРА ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ С УЧЕТОМ ТРЕБОВАНИЙ ТОЧНОСТИ РАСЧЕТОВ

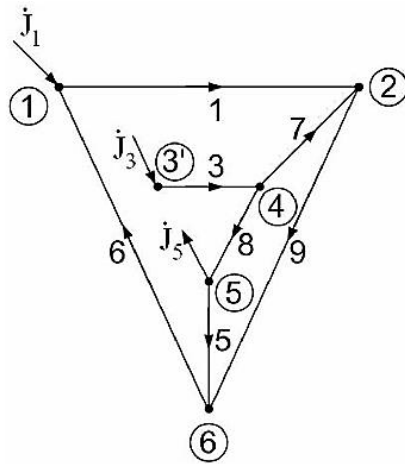
Н.В. Серeda

Аннотация: рассмотрены виды погрешностей, возникающих при решении задач в электроэнергетике, представляющих собой системы дифференциальных уравнений разных порядков. Проведен анализ влияния различных видов погрешностей на результат решения задачи.

Ключевые слова: математическая модель, численные методы, погрешности расчетов, устойчивость вычислений.

При решении задач электроэнергетики необходимо понимать, что получить точное решение невозможно, так как для решения любой задачи необходимо составить математическую модель, которая представляет собой систему дифференциальных уравнений, так как основные параметры энергосистемы изменяются во времени. Для таких задач отсутствуют типовые методы решения. В каждом конкретном случае осуществляется выбор оптимального метода, так как одну и ту же задачу можно решить несколькими методами, при этом точность полученных результатов может быть разной.

В любом случае решать задачи электроэнергетики точными методами невозможно из-за сложности математической модели, в которой большое количество уравнений (от нескольких сотен до нескольких тысяч) и соответствующее количество искоемых переменных, многие из которых представляют собой комплексные числа.



$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \underline{y}_{11} \dot{U}_1 & -\underline{y}_{12} \dot{U}_2 & & & & -\underline{y}_{16} \dot{U}_6 = \dot{J}_1 \\ -\underline{y}_{21} \dot{U}_1 & \underline{y}_{22} \dot{U}_2 & & -\underline{y}_{24} \dot{U}_4 & & -\underline{y}_{26} \dot{U}_6 = 0 \\ & & \underline{y}_{33} \dot{U}_3 & -\underline{y}_{34} \dot{U}_4 & & = \dot{J}_3 \\ & -\underline{y}_{42} \dot{U}_2 & -\underline{Y}_{43} \dot{U}_3 & \underline{y}_{44} \dot{U}_4 & -\underline{y}_{45} \dot{U}_5 & = 0 \\ & & & -\underline{y}_{54} \dot{U}_4 & \underline{y}_{55} \dot{U}_5 & -\underline{y}_{56} \dot{U}_6 = -\dot{J}_5 \\ -\underline{y}_{61} \dot{U}_1 & -\underline{y}_{62} \dot{U}_2 & & & -\underline{y}_{65} \dot{U}_5 & \underline{y}_{66} \dot{U}_6 = 0 \end{array} \right.$$

Рис. 1 – Простейший граф энергосистемы и соответствующая ему система узловых уравнений для расчета основных параметров энергосистемы

Решение задач итерационными методами в любом случае предполагает несколько видов погрешностей, оказывающих взаимное влияние друг на друга:

- погрешность, имеющая место для выбранного метода решения;
- погрешность, обусловленная линеаризацией нелинейной системы уравнений;
- погрешность, обусловленная округлениями, неизбежными в процессе решения задачи любым методом.

Помимо этого, погрешность может быть обусловлена некорректно составленной математической моделью, а также, что особенно характерно для энергосистем, некорректными исходными данными.

Совокупность всех вышеперечисленных погрешностей может легко привести к получению недопустимого решения даже в тех случаях, когда известно, что задача решается, и собственно решение

производится для уточнения предполагаемых значений искомых переменных, представляющих собой параметры энергосистемы.

Еще одной проблемой, которую необходимо решать при выборе метода решения системы нелинейных уравнений, является влияние погрешностей в исходных данных задачи на погрешность решения, то есть устойчивость вычислений. Если даже небольшое изменение исходных данных оказывает существенное влияние на результаты решения или вообще приводит к ответу «решение данной системы отсутствует», то считают, что задача неустойчива и исходные данные заданы некорректно.

Вывод. Для получения корректного решения любой задачи электроэнергетики необходимо вначале корректно задать исходные данные и составить математическую модель задачи, затем необходимо задать допустимую погрешность для решения задачи. После этого следует выбрать такой метод решения, который обеспечит максимально быструю сходимость итерационного процесса для данной задачи и обеспечит минимальную погрешность решения. Для выполнения всех вышеперечисленных проблем необходим специалист с опытом работы и высоким уровнем знаний не только в области энергетики, но и в области математики и программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моделирование в электроэнергетике [Электронный ресурс] URL: simenergy.ru (дата обращения 01.04.2024г.)
2. Бартоломей П.И. Оптимизация режимов энергосистем: учебное пособие— Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2008. -164 с.
3. Карманов В.Г. Математическое программирование. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 264 с.
4. И.Л. Майков, Л.Б. Директор, В.М. Зайченко. Решение задач оптимизации энергетических систем с несколькими автономными энергоустановками, УБС, 2010, выпуск 31, с.110–129.
5. Математические задачи энергетики: учеб. пособие/О.М. Грунин, Л.В. Савицкий. – Чита: ЗабГУ, 2014. - 260 с.
6. Математические задачи энергетики: учебное пособие / Г.Б. Белых, А.Н. Шеметов, Ю.Н. Кондрашова [и др.]. — Магнитогорск: МГТУ им. Г.И. Носова, 2019. — 176 с.

ОБ ЭТАПАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАХОЖДЕНИИ УГЛА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ НА СФЕРЕ

А.И. Серый
БрГУ им. А.С. Пушкина, Брест, Беларусь

Аннотация: в статье предложены таблицы, в одной из которых отражены этапы решения задачи о нахождении угла пересечения двух окружностей на сфере, а в другой анализируются предельные случаи общей формулы. Таблицы могут найти применение в образовательном процессе при изучении сферической астрономии и сферической геометрии.

Ключевые слова: пересечение окружностей на сфере, методика преподавания астрономии, методика преподавания математики.

В вузовском курсе астрономии встречается, в частности, задача о нахождении угла ψ , под которым расположена по отношению плоскости математического горизонта линия, вдоль которой происходит видимое движение звезды, Луны или другого объекта (если считать склонение объекта постоянным в течение времени наблюдения). Следует отметить, что указанный угол в точности равен углу ψ_0 между плоскостями небесного экватора и математического горизонта только в том случае, если склонение объекта $\delta = 0$ (тогда он восходит в точке востока, а заходит в точке запада, а его небесная параллель находится в плоскости небесного экватора) [1, с.5,6]. Чем дальше от указанных точек наблюдаются восход и заход в действительности, тем заметнее различие между ψ и ψ_0 либо $\pi - \psi_0$ (особенно заметным оно становится, например, если точки восхода и захода приближаются к точке севера, а тип объекта – к незаходящему). Поскольку точному решению этой задачи не уделяется достаточного внимания в учебной литературе по астрономии, представляет интерес разбор последовательности действий, необходимых для получения указанного решения.

С математической точки зрения задача сводится к задаче о нахождении угла между касательными к двум окружностям (в точках их пересечения) на поверхности сферы, где одна из окружностей находится на большом круге, а вторая – вообще говоря, на малом, и при этом наклонена к первой под произвольным углом ψ_0 . Пусть

радиус сферы R , склонение точек малой окружности δ , географическая широта пункта наблюдения φ , и тогда $\psi_0 = 90^\circ - \varphi$. Будем считать, что большая окружность находится в плоскости $z = 0$, а малая – в плоскости $z' = 0$. Штрихованная система координат повернута на угол ψ_0 относительно оси y (т.е. оси y и y' совпадают) против часовой стрелки при $\psi_0 > 0$ (с точки зрения наблюдения вдоль положительных направлений осей y и y'), после чего смещена вдоль оси z' . Поясняющий рисунок приведен ниже.

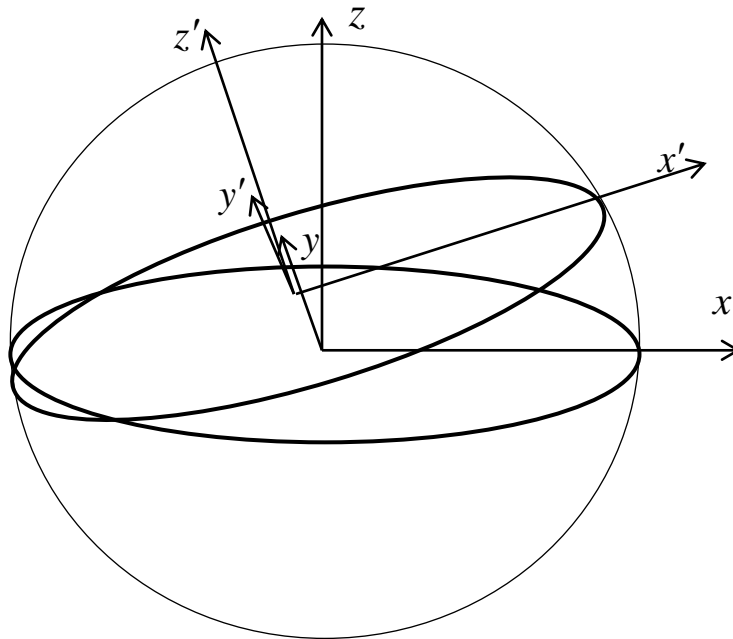


Рисунок – Пояснение к условию задачи

Этапы решения задачи отражены ниже в таблице 1. Составление подобных таблиц можно предлагать учащимся в качестве самостоятельных творческих заданий для развития алгоритмического и структурного мышлений.

Таблица 1 – Этапы решения задачи

Содержание этапа		Результат
1. Уравнение большой окружности		$x^2 + y^2 = R^2$
2. Уравнение малой окружности и	в штрихованных координатах	$(x')^2 + (y')^2 = R^2 \cos^2 \delta$
	взаимосвязь между координатами	$x' = x \cos(90^\circ - \varphi) + z \sin(90^\circ - \varphi),$ $z' = -x \sin(90^\circ - \varphi) + z \cos(90^\circ - \varphi) - R \sin \delta = 0, y' = y$ [2, с. 71]
	в нештрихованных координатах	$(x \sin \varphi + z \cos \varphi)^2 + y^2 = R^2 \cos^2 \delta$

3. Поиск точек пересечения (x_0, y_0) как решения системы уравнений двух окружностей		$x_0 = -R \sin \delta / \cos \varphi, x_0 \geq -R,$ $y_0 = \pm R \sqrt{1 - \sin^2 \delta / \cos^2 \varphi},$ $\sin^2 \delta / \cos^2 \varphi \leq 1$
4. Уравнения касательных к окружностям в точках (x_0, y_0)	исходный вид	$xx_0 + yy_0 = R^2, z = 0;$ $x'x'_0 + yy'_0 = R^2 \cos^2 \delta, z' = 0$
	уравнение касательной к большой окружности в каноническом виде [2, с. 80]	$x/l_1 = (y - \tilde{y}_0)/m_1, l_1 = R \cos \varphi / \sin \delta,$ $m_1 = \tilde{y}_0 = \pm R / \sqrt{1 - \sin^2 \delta / \cos^2 \varphi},$ $n_1 = 0$
	система уравнений для касательной к малой окружности [2, с. 80]	$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0,$ $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0,$ $A_1 = -R \sin \delta \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi},$ $B_1 = \pm R \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \delta}{\cos^2 \varphi}},$ $C_1 = -R \sin \delta \sin \varphi, D_1 = -R^2 \cos^2 \delta,$ $A_2 = -\cos \varphi, B_2 = 0, C_2 = \sin \varphi,$ $D_2 = -R \sin \delta$
	компоненты направляющего вектора касательной к малой окружности [2, с. 80]	$l_2 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, m_2 = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix},$ $n_2 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$
5. Нахождение косинуса угла между касательными [2, с. 82]		$\cos \psi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} =$ $= \pm \frac{\sin \varphi}{\cos \delta}$

Результаты исследования предельных случаев общей формулы отражены в таблице 2.

Таблица 2 – Предельные случаи общей формулы

Случай	Смысл	Результат
$\delta \rightarrow 0$	видимое движение объекта происходит по небесному экватору	$\cos \psi \rightarrow \pm \sin \varphi$, т.е. $\psi = 90^\circ \pm \varphi$
$\delta \rightarrow 90^\circ - \varphi$	объект занимает предельное положение между незаходящими и восходяще-заходящими	$\cos \psi \rightarrow \pm 1$, т.е. $\psi = 0^\circ$ или 180°

ЛИТЕРАТУРА

1. Клищенко А.П., Шупляк В.И. *Астрономия: Учеб. пособие.* М.: Новое знание, 2004. 224 с.: ил.

2. Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. *Основные математические формулы: справочник; под ред. Ю.С. Богданова.* Минск: Вышэйшая школа, 1995. 380 с.

УДК 517.956.2

ПОГРЕШНОСТИ УСРЕДНЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ

М.М. Сиражудинов
ДФИЦ РАН, ДГУ, Махачкала
М.Г. Ибрагимов
ДГУ, ДГУНХ, Махачкала

Аннотация: в статье даны оценки погрешности усреднения для одной задачи Римана-Гильберта для уравнения Бельтрами при минимальном требовании на коэффициент – он измеримый и ограниченный.

Ключевые слова: усреднение, уравнение Бельтрами, задача Римана-Гильберта.

В литературе (опубликованной до 2004 года) по усреднению дивергентных эллиптических уравнений доказаны многочисленные оценки погрешности усреднения следующего вида

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon c_1, \quad (01)$$

$$\|u^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{W_2^1(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon c_2, \quad (02)$$

В этих оценках постоянные c_1 и c_2 зависят от гладкости нулевого приближения u^0 , которая, в свою очередь, определяется гладкостью правой части f уравнения. Мы в работе рассматриваем вопрос усреднения задачи Римана-Гильберта для уравнения Бельтрами с периодическим измеримым ограниченным коэффициентом.

1. Задача Римана-Гильберта.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} Au \equiv \partial_{\bar{z}}u + \mu(x)\partial_zu = f \in L_q(Q), & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} u = 0 \text{ на } \partial Q, u \in W_q^1(Q), & (2) \end{cases}$$

где Q – ограниченная односвязная область плоскости с гладкой (класса C^{1+1}) границей, $\mu = \mu(x)$, $x = (x_1, x_2)$, – измеримая ограниченная комплекснозначная функция:

$$\operatorname{vrai} \sup_{x \in Q} |\mu(x)| \leq k_0 < 1, \quad (3)$$

где $k_0 > 0$ – постоянная эллиптичности, $2 < q \leq q_0$, q_0 и q – показатели повышенной суммируемости. Как известно, задача (1), (2) нётерова с одномерным ядром и с индексом один (см. [1]). Следовательно, задача Римана-Гильберта (1), (2) однозначно разрешима для любой правой части $f \in L_q(Q)$. При этом $u = ic$, $c \in \mathbb{R}$, (i – мнимая единица) – общее решение однородной задачи, $u = \tilde{u} + ic$, $c \in \mathbb{R}$ – общее решение неоднородной задачи. Задача (1), (2) имеет единственное решение для любого $f \in L_q(Q)$ при дополнительном предположении

$$\operatorname{Im} u(z_0) = 0, \quad (4)$$

где z_0 – любая фиксированная точка границы ∂Q , при этом $c = -\operatorname{Im} \tilde{u}(z_0) = 0$.

В дальнейшем подпространство пространства $W_q^1(Q)$, образованное функциями, которые удовлетворяют условиям (2) и (4), будем обозначать через $\dot{W}_q^1(Q)$:

$$\dot{W}_q^1(Q) = \{u \in W_q^1(Q) \mid \operatorname{Re} u|_{\partial Q} = 0, \operatorname{Im} u(z_0) = 0\}. \quad (5)$$

Таким образом, задача

$$\begin{cases} Au \equiv \partial_{\bar{z}}u + \mu(x)\partial_zu = f \in L_q(Q), \\ u \in \dot{W}_q^1(Q), \end{cases} \quad (6)$$

где z_0 – любая фиксированная точка границы ∂Q , однозначно разрешима для любой правой части $f \in L_q(Q)$.

2. Оценки погрешности усреднения задачи Римана-Гильберта.

Рассмотрим задачу

$$Au^\varepsilon \equiv \partial_{\bar{z}}u^\varepsilon + \mu(\varepsilon^{-1}x)\partial_zu^\varepsilon = f \in L_q(Q), \quad (7)$$

$$u^\varepsilon \in \dot{W}_q^1(Q) = \{\omega \in W_q^1(Q) \mid \operatorname{Re} \omega|_{\partial Q} = 0, \operatorname{Im} \omega(z_0) = 0\},$$

где Q – ограниченная односвязная область плоскости с гладкой (класса C^{1+1}) границей, z_0 – произвольная фиксированная точка границы ∂Q , $\mu = \mu(x)$ – периодическая (периода 1 по каждой переменной x_1 и x_2) измеримая ограниченная комплекснозначная функция:

$$\operatorname{vrai\,sup}_{x \in \square} |\mu(x)| \leq k_0 < 1, \quad (8)$$

$k_0 > 0$ – постоянная, $2 < q \leq q_0$, q_0 – показатель повышенной суммируемости. Задача (7) для любой правой части $f \in L_q(Q)$ имеет единственное решение.

Усредненной для (10) будет задача

$$u^0 \in \dot{W}_q^1(Q), \quad A_0 u^0 = f \in L_q(Q), \quad (9)$$

где $A_0 = \partial_{\bar{z}} + \mu^0 \partial_z$, μ^0 – постоянная, $|\mu^0| \leq k_0 < 1$, A_0 – тот же оператор, что и в [2].

Нас интересуют оценки близости решений задач (7) и (9), при этом предполагаем, что правые части задач (7) и (9) одинаковые и принадлежат пространству $W_q^1(Q)$. Будем использовать первое приближение, определенное формулой

$$v^\varepsilon(x) = u^0(x) + \varepsilon \mathcal{N}(y) \partial_z u^0(x), \quad y = \varepsilon^{-1} x, \quad (10)$$

где нулевое приближение u^0 есть решение задачи (9). Отметим, что ввиду эллиптичности уравнения (9) и постоянства коэффициента μ^0 , для u^0 имеет место оценка

$$\|u^0\|_{W_q^2(Q)} \leq c \|f\|_{W_q^1(Q)}.$$

Справедлива следующая

Теорема. Пусть Q – ограниченная односвязная область плоскости и пусть $f \in W_q^1(Q)$, u^ε – решение задачи Римана-Гильберта (7), u^0 – решение усредненной задачи (9). Тогда имеют место оценки

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{W_q^1(Q)} \leq c^q \sqrt[q]{\varepsilon} \|f\|_{W_q^1(Q)}, \quad (11)$$

$$\|u^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{W_q^1(Q)} \leq c^q \sqrt[q]{\varepsilon} \|f\|_{W_q^1(Q)}, \quad (12)$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от области Q и постоянной эллиптичности k_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Сиражудинов М.М., Тихомирова С.В. О гёльдеровости решений обобщенных систем уравнений Бельтрами//Дифф. Урав., 2019 г., Т.55, №2, С.226-237.

2. Сиражудинов М.М., Ибрагимов М.Г. О некоторых задачах на всей плоскости для уравнения Бельтрами // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки, 2023, № 2. С. 100 -108.

УДК 517.968

АППРОКСИМАЦИЯ РЯДОВ ЛОРАНА РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко
ГГУ им. Ф.Скорины, Гомель, Беларусь

Аннотация: в статье изучается новая схема аппроксимации рядов Лорана. Вместо обычных многочленов рассматриваются обобщенные многочлены. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых задача Фрбениуса-Паде-Лорана имеет единственное решение.

Ключевые слова: многочлены Паде, степенные ряды, ряды Лорана, проблема Паде Лорана, теорема Фарби.

Постановка задачи.

Классические аппроксимации Паде определяются для рядов вида

$$f^+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k, \quad f^-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_{-k}}{z^k}.$$

При этом говорят об аппроксимациях Паде соответственно в точках $z = 0$ и $z = \infty$.

Аппроксимацией Паде типа (n, m) ряда f^+ называют рациональную дробь $[n, m]_{f^+} = P_{n,m}^+ / Q_{n,m}^+$, где тождественно не равный нулю многочлен $Q_{n,m}^+$, $\deg Q_{n,m}^+ \leq m$ и многочлен $P_{n,m}^+$, $\deg P_{n,m}^+ \leq n$ определяются из соотношений

$$(Q_{n,m}^+ f^+ - P_{n,m}^+)(z) = O(z^{n+m+1}) \quad (1)$$

Здесь и далее n, m – целые неотрицательные числа, а под $O(z^p)$ понимаем степенной ряд вида $c_1 z^p + c_2 z^{p+1} + \dots$. Многочлены Паде $Q_{n,m}^+$, $P_{n,m}^+$ условиями (1) определяются не единственным образом, при этом дробь $P_{n,m}^+ / Q_{n,m}^+$ определяет одну и ту же рациональную функцию [1].

Дадим определение аппроксимации Паде в точке $z = \infty$. Для этого рассмотрим степенной ряд $g^+(z) := f^-(1/z)$.

Аппроксимацией Паде типа (n, m) ряда f^- называют (см.[5]) рациональную функцию $[n, m]_{f^-}(z) := [n, m]_{g^+}(z^{-1})$.

Обозначим через $Q_{n,m}^+(\cdot; g^+), P_{n,m}^+(\cdot; g^+)$ — многочлены Паде ряда g^+ , то из (1) получим

$$z^m Q_{n,m}^+(z^{-1}; g^+) f^-(z) - z^m P_{n,m}^+(z^{-1}; g^+) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right).$$

Отсюда следует, что $[n, m]_{f^-} = P_{n,m}^- / Q_{n,m}^-$, где

$$Q_{n,m}^-(z) := z^m Q_{n,m}^+(z^{-1}; g^+), P_{n,m}^-(z) := z^m P_{n,m}^+(z^{-1}; g^+).$$

В диагональном случае числитель $P_{n,m}^-$ и знаменатель $Q_{n,m}^-$ дроби являются многочленами. Для произвольной пары (n, m) это не так, поскольку

$$P_{n,n}^-(z) = z^m \left(\frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right).$$

В отличие от диагонального случая определение аппроксимаций Паде $[n/n]_f$ для произвольной пары индексов (n, m) имеет некоторую специфику.

Рассмотрим произвольный ряд Лорана вида:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k z^k := \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_{-k}}{z^k} = f^+(z) + f^-(z). \quad (2)$$

Существуют различные подходы в построении аппроксимаций Паде для ряда (2) (подробнее см.[2]–[8]). В [7], например, предлагается в качестве аппроксимации Паде ряда (2) взять сумму $[n, m]_f := [n, m]_{f^+} + [n, m]_{f^-}$.

В настоящее время "проблема Паде-Лорана" по-прежнему является актуальной, например, в хорошо известной монографии Дж. Бейкера и П. Грейвс-Морриса [2] 1981 года отмечается, что "работа по созданию схемы аппроксимации рядов Лорана с простыми формальными свойствами и общими теоремами сходимости находится в начальной стадии...". Существенных продвижений, после выхода этой монографии, в исследовании проблемы не было.

В статье предлагается новый подход к проблеме: вместо обычных многочленов мы рассматриваем обобщенные многочлены (многочлены Лорана). Обобщенные многочлены, что уже было отмечено, неявно присутствуют в классическом определении аппроксимаций Паде в точке $z = \infty$.

2. Аппроксимации Паде ряда Лорана. Через L_m обозначим

множество всех рациональных дробей вида (многочлены и рациональные функции рассматриваются над полем \mathbb{C})

$$Q(z) = \frac{a_{-p}}{z^p} + \dots + \frac{a_{-1}}{z^{-1}} + a_0 \dots a_1 z + \dots a_p z^p,$$

где $p \leq m$. Функцию $Q \in L_m$, будем называть обобщенным многочленом (многочленом Лорана) степени не выше m , а

$$\deg Q = p \Leftrightarrow |a_{-p}| + |a_p| \neq 0.$$

По определению n -ой частной суммой ряда (2) будем называть обобщенный многочлен

$$S_n(z) = \sum_{k=-n}^n f_k z^k.$$

Рассмотрим задачу Фробениуса-Паде-Лорана:

Задача A^L . Для фиксированной пары индексов (n, m) и ряда Лорана f найти такие тождественно не равный нулю обобщенный многочлен $Q_{n,m} \in L_m$ и обобщенный многочлен $P_{n,m} \in L_m$, чтобы

$$(Q_{n,m}f - P_{n,m})(z) = \sum_{k=m+1}^{\infty} (c_k z^k + c_{-k} z^{-k}). \quad (3)$$

Решение задачи A^L всегда существует (см. теорему 1). В частности, при $m = 0$ её решением является n -ая частная сумма S_n ряда Лорана f . Если пара $(Q_{n,m}, P_{n,m})$ является решением задачи A^L , то для любого комплексного числа $\lambda \neq 0$ новая пара $(\lambda Q_{n,m}, \lambda P_{n,m})$ также является решением этой задачи. Как и в классическом случае неединственность может быть и более существенной.

Определение. 1 Будем говорить, что задача A^L имеет единственное решение, если это решение единственно с точностью до числового множителя.

Определение. 2 Если пара $(Q_{n,m}, P_{n,m})$ является решением задачи A^L , то рациональную дробь $[n, m]_f^- = P_{n,m}/Q_{n,m}$, будем называть аппроксимацией Паде типа (n, m) для ряда Лорана f .

Когда задача A^L имеет единственное решение, то дробь $[n, m]_f^-$ определяется однозначно. При этом, в отличие от аппроксимаций Паде рядов f^+, f^- аппроксимации Паде $[n, m]_f^-$ ряда Лорана f определяются, вообще говоря, не однозначно.

3. Критерий единственности. Без ограничения общности (см. [1; гл.2, §1]) будем рассматривать ряды Лорана (2), в которых правильная и главные части f^+, f^- имеют бесконечное число членов.

Каждому $l \in \mathbb{Z}$ поставим в соответствие матрицу-строку

$$F_l = (f_{l+m} \ f_{l+m-1} \ \dots \ f_{l+1} \ f_l \ f_{l-1} \ \dots \ f_{l-m+1} \ f_{l-m})$$

при $m \neq 0$ рассмотрим определитель порядка $2m + 1$

$$D(n, m; z) =$$

$$= \begin{vmatrix} f_{n+2m} & \cdots & f_{n+m+1} & f_{n+m} & f_{n+m-1} & \cdots & f_n \\ f_{n+2m-1} & \cdots & f_{n+m} & f_{n+m-1} & f_{n+m-2} & \cdots & f_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n+m+1} & \cdots & f_{n+2} & f_{n+1} & f_n & \cdots & f_{n-m+1} \\ z^{-m} & \cdots & z^{-1} & 1 & z & \cdots & z^m \\ f_{-n+m-1} & \cdots & f_{-n} & f_{-n-1} & f_{-n-2} & \cdots & f_{-n-m-1} \\ f_{-n+m-2} & \cdots & f_{-n-1} & f_{-n-2} & f_{-n-3} & \cdots & f_{-n-m-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{-n} & \cdots & f_{-n-m-1} & f_{-n-m-2} & f_{-n-m-3} & \cdots & f_{-n-2m} \end{vmatrix}.$$

Через $H_{n,m}$ обозначим матрицу порядка $2m \times (2m + 1)$, которую получили из элементов определителя $D(n, m; z)$ после удаления в нём $(m + 1)$ -ой строки. Определитель $d_l(n, m)$, это определитель полученный из определителя $D(n, m; z)$ заменой $(m + 1)$ -ой строки на строку F_l . Обозначим через $\Delta(n, m)$ определитель порядка $2m$, который получили в результате вычёркивания в определителе $D(n, m; z)$ $(m + 1)$ -ой строки и $(m + 1)$ -го столбца.

Теорема. 3 Для того, чтобы для фиксированной пары (m, n) , $m \neq 0$ задача A^L имела единственное решение необходимо и достаточно, чтобы $H_{n,m}$ была матрицей полного ранга, т.е. $\text{rank} H_{n,m} = 2m$. Если $\text{rank} H_{n,m} = 2m$, то при определенном выборе нормирующего множителя

$$Q_{n,m}(z) = D(n, m; z), \quad P_{n,m}(z) = \sum_{p=-n}^n d_p(n, m) z^p, \quad (4)$$

$$(Q_{n,m} f - P_{n,m})(z) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} \{d_p(n, m) z^p + d_{-p}(n, m) z^{-p}\}. \quad (5)$$

Доказательство. 4 Пусть искомый многочлен имеет вид

$$Q_{n,m}(z) = \sum_{p=-m}^m u_p z^p.$$

После преобразований получаем

$$Q_{n,m}(z) f(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{p=-m}^m f_{l-p} u_p \right) z^l = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l z^l, \quad \text{где}$$

$$c_l = \sum_{p=-m}^m f_{l-p} u_p, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Выберем коэффициенты u_p многочлена $Q_{n,m}$ так, чтобы

$$c_l = \sum_{p=-m}^m f_{l-p} u_p = 0, \quad l = \pm(n + 1), \dots, \pm(n + m), \quad (6)$$

и положим $P_{n,m}(z) = \sum_{p=-n}^n c_p z^p$. Заметим, что многочлены $Q_{n,m}$, $P_{n,m}$ удовлетворяют условиям (3). Исследуем совместность системы (6).

Система (6) в матричной форме имеет вид:

$$H_{n,m} \cdot u^T = \theta^T,$$

где $u = (u_{-m} \cdots u_{-1} u_0 u_1 \cdots u_m)$ – матрица-строка неизвестных коэффициентов, а θ – матрица-строка из $2m + 1$ нулей. Поскольку система (6) является однородной и в ней число неизвестных на единицу больше числа уравнений, то из теореме Кронекера–Капелли следует, что эта система имеет ненулевое решение. Более того, множество всех линейно независимых решений системы (6) состоит из одного фундаментального решения тогда и только тогда, когда $\text{rank} H_{n,m} = 2m$. Все остальные ненулевые решения можно получить умножением этого фундаментального решения на $\lambda \neq 0$. Первая часть теоремы доказана.

Докажем теперь равенств (4), (5). Т.к. $\text{rank} H_{n,m} = 2m$, то при некотором $s, 1 \leq s \leq 2m + 1$ определитель, полученный в результате вычеркивания в матрице $H_{n,m}$ s -го столбца, отличен от нуля. Положим, например, $s = m + 1$. Тогда, зафиксировав неизвестное u_0 , получим квадратную неоднородную систему

$$\sum_{p=-m}^{-1} f_{l-p} u_p + \sum_{p=1}^m f_{l-p} u^p = -f_l u_0, \quad l = \pm(n + 1), \dots, \pm(n + m), \quad (7)$$

главный определитель которой $\Delta(n, m) \neq 0$. Заметим, что $u_0 \neq 0$. В противном случае система (7), а значит и система (6) имели бы только нулевые решения. Система (7) имеет единственное ненулевое решение и найти его можно с помощью формул Крамера:

$$u_p = \frac{\Delta_p(n, m)}{\Delta(n, m)}, \quad p = \overline{-m, m}, \quad p \neq 0,$$

где $\Delta_p(n, m)$ – определитель, полученный из определителя $\Delta(n, m)$ заменой в нём p -го столбца на столбец свободных членов. Если положить $\Delta_0(n, m) := u_0 \Delta(n, m)$, то

$$Q_{n,m}(z) = \sum_{p=-m}^m u_p z^p = \sum_{p=-m}^m \frac{\Delta_p(n, m)}{\Delta(n, m)} z^p. \quad (8)$$

Разлагая определитель $D(n, m; z)$ по элементам $(m + 1)$ -ой строки и сравнивая с (8), делаем вывод, что

$$Q_{n,m}(z) = u_0 \frac{D(n, m; z)}{\Delta(n, m)}. \quad (9)$$

Сопоставив (8) и (6), замечаем, что для нахождения c_p следует только в (8) z^p заменить на f_{l-p} . Учитывая введённые обозначения, получаем, что

$$c_p = u_0 \frac{d_p(n, m; z)}{\Delta(n, m)}.$$

Поэтому многочлен $P_{n,m}$ и остаточный член $Q_{n,m}f - P_{n,m}$ можно представить в виде

$$P_{n,m}(z) = \frac{u_0}{\Delta(n,m)} \sum_{p=-n}^n d_p(n,m) z^p \quad (10)$$

$$(Q_{n,m}f - P_{n,m})(z) = \frac{u_0}{\Delta(n,m)} \sum_{p=n+m+1}^{\infty} (d_p(n,m) z^p + d_{-p}(n,m) z^{-p}) \quad (11)$$

Умножая (9) – (11) на нормирующий множитель $\Delta(n,m)/u_0$, получим (4), (5).

Если при вычеркивании в $H_{n,m}$ столбца с номером $s \neq m+1$ получается отличный от нуля определитель, рассуждаем аналогично. Остаётся заметить, что если $\text{rank} H_{n,m} = 2$, то многочлен $D(n,m; z)$ не может тождественно равняться нулю. Теорема доказана.

4. Замечания. При $f_{n+1} \neq 0$ единственный полюс z^n дроби $[n/1]_{f^+}$ вычисляется по формуле $z_n = f_n/f_{n+1}$. Согласно теореме Фабри "об отношении" (см.[9]), если $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n/f_{n+1} = z^* \neq 0$, то радиус сходимости ряда f^+ равен $|z^*|$ и z^* – особая точка суммы этого ряда. Таким образом, если выполняются условия теоремы Фабри, то полюсы z^n дроби $[n/1]_{f^+}$ сходятся к особой точке суммы степенного ряда f^+ , и, наоборот, если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z^*$, то z^* – особая точка суммы степенного ряда f^+ .

Покажем, что в условиях теоремы Фабри аппроксимации Паде $[n/1]_f$ ряда Лорана f при $n \rightarrow \infty$ также локализуют особые точки его суммы. Пусть $f_{\mp n} \neq 0$ при $n \geq n_0$ и существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = z_+ \neq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{-n}}{f_{-n-1}} = \frac{1}{z_-} \neq \infty, \quad |z_-| < |z_+|. \quad (12)$$

По теореме Фабри сумма ряда f аналитична в кольце $K = \{z: 0 < r < |z| < R\}$, причем точки z_{\pm} являются её особыми точками и лежат на границе кольца K : $|z_-| = r$, а $|z_+| = R$. Нормируя знаменатель дроби $[n/1]_f$, из (4) получим

$$Q_{n,1}^* = \frac{1}{f_{n+3}f_{-n-3}} Q_{n,1}(z) = \begin{vmatrix} \frac{f_{n+2}}{f_{n+3}} & \frac{f_{n+1}}{f_{n+3}} & \frac{f_n}{f_{n+3}} \\ z^{-1} & 1 & z \\ \frac{f_{-n}}{f_{-n-3}} & \frac{f_{-n-1}}{f_{-n-3}} & \frac{f_{-n-2}}{f_{-n-3}} \end{vmatrix}.$$

Отсюда и из (12) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{n,1}^*(z) = \frac{z_+}{zz^3} \begin{vmatrix} 1 & z_+ & z_+^2 \\ 1 & z & z^2 \\ 1 & z_- & z_-^2 \end{vmatrix} = \frac{z_+}{z_-^2} (z_- - z_+)(z - z_+) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_-} \right).$$

Таким образом, полюса дроби $[n/1]_f$ стремятся к особым точкам z_{\pm} суммы ряда f , лежащим на границе кольца K , внутри которого эта сумма аналитична.

А.А. Гончар высказал гипотезу о том, что свойство аппроксимаций Паде $[n/1]_{f+}$, отмеченное выше, имеет место для аппроксимаций Паде $[n/1]_{f+}$ при любом фиксированном m . В общем случае гипотеза А.А. Гончара доказана С.П. Суетиным [10,11]. Вполне естественно предположить, что в адаптированном виде гипотеза А.А. Гончара справедлива и для аппроксимаций Паде $[n/1]_f$ ряда Лорана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никишин Е.М., Сорокин В.Н. Рациональные аппроксимации и ортогональность. М: Наука, 1988.
2. Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения. М: Мир. 1986.
3. Gragg W.B. Laurent, Fourier and Chebyshev-Padé tables orthogonal polynomials, In: "Padé and Rational Approximation". Eds. E.B.Saff, R.S.Varga. – Academic Press, 1977, p. 61–72.
4. Cheney E.W. Introduction to Approximation Theory McGraw-Hill Book Company, 1966.
5. Chisholm J.S.R, Common A.K. Generalisations of Padé Approximation for Chebyshev and Fourier Series orthogonal polynomials In Proc. 1979 Int. Christoffel Symposium. Ed. P.L. Butzer.–Basel: Birkhlluser Verlag, Springer Basel AG, 1981, p. 212–231.
6. Fleischer J. Analytic continuation of scattering amplitudes and Padé approximants, Nuclear Physics B, Vol. 37, №1, 1972, p. 59–76.
7. Gragg W.B., Johson G.D. The Laurent-Padé tables, Fourier and Chebyshev-Padé tables, Proc. I.F.I.P. Congress 74, North Holland, 1974, p. 632–637.
8. Fleischer J. Nonlinear pade approximants for legendre series, J. Math. Phys. Vol. 14 (1973), p. 246–248.
9. Бибербах Л. Аналитическое продолжение. М: Наука, 1967.
10. Суетин С.П. О полюсах m -й строки таблицы Паде. Матем. сб., Т.120, №4, 1983, 500–504.

11. Суетин С.П. Об одной обратной задаче для m -й строки таблицы Паде // Матем. сб. Т. 124, №2, 1984, 238–250.

УДК 517

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ФОРМУЛЫ КРИСТОФФЕЛЯ-ДАРБУ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Рагим А. Хаиров, Рахман А. Хаиров
ДагГАУ, ДГТУ, Махачкала

Аннотация: в статье для системы ортогональных дробно-рациональных функций получены рекуррентные соотношения и формулы Кристоффеля-Дарбу

Ключевые слова: ортогональные системы, весовая функция, формула Кристоффеля-Дарбу.

Рассматривается система ортонормированных на $(0, +\infty)$ по симметричному весу $h(x) = \frac{1}{x} e^{-x - \frac{1}{x}}$ дробно-рациональных функций $\{A_0(x), A_n(x), B_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ вида

$$A_n(x) = \mu_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + \sum_{k=1}^{n-1} b_k x^{-k},$$

$$B_n(x) = \tau_n x^{-n} + \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k x^{-k}.$$

В [2] доказывається существование и единственность такой системы. Для этой системы имеют место рекуррентные соотношения и формулы Кристоффеля-Дарбу.

Для удобства вводится система вектор-функций

$$P_0(x) = \begin{bmatrix} A_0(x) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_n(x) = \begin{bmatrix} A_n(x) \\ B_n(x) \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

удовлетворяющих условиям

$$\int_0^{+\infty} h(x) P_n(x) P_k(x) dx = \begin{bmatrix} \delta_{nk} & 0 \\ 0 & \delta_{nk} \end{bmatrix}, \quad \int_0^{+\infty} h(x) P_0(x) P_k(x)' dx = \begin{bmatrix} \delta_{nk} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

(штрих означает транспонирование).

Теорема 1. Для системы функций (1) имеют место рекуррентные соотношения и формула Кристоффеля-Дарбу

$$xP_n(x) = \lambda_n P_{n+1}(x) + a_n P_n(x) + \lambda'_{n-1} P_{n-1}(x) \quad (2)$$

$$(x-t)K_n(x,t) = P_n(t)' \lambda_n P_{n+1}(x) + P_n(x)' \lambda_n P_{n+1}(t), \quad (3)$$

где

$$K_n(x,t) = \sum_{k=0}^n P_k(t)' P_k(x) = A_0(t)A_0(x) + \sum_{k=1}^n A_k(t)A_k(x) + B_k(t)B_k(x).$$

Для элементов матриц

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \int_0^{+\infty} h(x)xP_n(x)P_{n+1}(x)'dx, & a_n &= \int_0^{+\infty} h(x)xP_n(x)P_n(x)'dx, \\ c_n &= \int_0^{+\infty} h(x)\frac{1}{x}P_n(x)P_{n+1}(x)'dx, & d_n &= \int_0^{+\infty} h(x)\frac{1}{x}P_n(x)P_n(x)'dx \end{aligned}$$

вводятся обозначения

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \begin{bmatrix} \lambda_{11}^{(n)} & \lambda_{12}^{(n)} \\ \lambda_{21}^{(n)} & \lambda_{22}^{(n)} \end{bmatrix}, & a_n &= \begin{bmatrix} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} \\ a_{21}^{(n)} & a_{22}^{(n)} \end{bmatrix}, \\ c_n &= \begin{bmatrix} c_{11}^{(n)} & c_{12}^{(n)} \\ c_{21}^{(n)} & c_{22}^{(n)} \end{bmatrix}, & d_n &= \begin{bmatrix} d_{11}^{(n)} & d_{12}^{(n)} \\ d_{21}^{(n)} & d_{22}^{(n)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Легко показать, что $\lambda_{12}^{(n)} = \lambda_{22}^{(n)} = c_{11}^{(n)} = c_{12}^{(n)} = 0$. Пользуясь этими равенствами и формулами (2), (3) получим соответственно рекуррентные соотношения

$$xA_n(x) = \lambda_{11}^{(n)} A_{n+1}(x) + a_{11}^{(n)} A_n(x) + a_{12}^{(n)} B_n(x) + \lambda_{11}^{(n-1)} A_{n-1}(x) + \lambda_{21}^{(n-1)} B_{n-1}(x),$$

$$xB_n(x) = \lambda_{21}^{(n)} A_{n+1}(x) + a_{21}^{(n)} A_n(x) + a_{22}^{(n)} B_n(x),$$

$$\frac{1}{x} A_n(x) = d_{11}^{(n)} A_n(x) + d_{12}^{(n)} B_n(x) + c_{21}^{(n-1)} B_{n-1}(x),$$

$$\frac{1}{x} B_n(x) = c_{21}^{(n)} A_{n+1}(x) + c_{22}^{(n)} B_n(x) + c_{21}^{(n-1)} A_n(x) + d_{22}^{(n)} B_n(x) + c_{22}^{(n-1)} B_{n-1}(x)$$

и формулы Кристоффеля-Дарбу в следующем виде

$$(x-t)K_n(x,t) = (\lambda_{11}^{(n)} A_n(t) + \lambda_{21}^{(n)} B_n(t))A_{n+1}(x) - (\lambda_{11}^{(n)} A_n(x) + \lambda_{21}^{(n)} B_n(x))A_{n+1}(t),$$

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{t}\right)K_n(x,t) = (c_{21}^{(n+1)} A_n(t) + c_{22}^{(n)} B_{n+1}(x))B_n(t) - (c_{21}^{(n)} A_{n+1}(t) + c_{22}^{(n)} B_{n+1}(t))B_n(x).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены в математической физике //Интегральные преобразования и специальные функции. -1, №3 1998, с. 13-16.

2. Хаиров Р.А. Ортогональные системы дробно-рациональных функций с симметричным весом на полуоси. // Применения функционального анализа в теории приближений. Сборник научных трудов. – Тверь, Тверской государственный университет, 2001, с. 115-122.

УДК 538.958

**ЭЛЕКТРОННЫЕ ЦЕНТРЫ ПРИЛИПАНИЯ С
ОТТАЛКИВАЮЩИМ БАРЬЕРОМ В КРИСТАЛЛАХ
CdS:Rb и CdS_xSe_{1-x}<Rb>**

**М.М. Хамидов, Н.Н. Магомедов
ДГУ, ДГТУ, Махачкала**

Аннотация: представлены результаты анализа спектров термостимулированной проводимости в кристаллах селенида и сульфоселенида кадмия, легированных рубидием. Экспериментально наблюдаемые характеристики центров прилипания интерпретированы в рамках модели, допускающей их связь с центрами с отталкивающими барьерами.

Ключевые слова: селенид кадмия, сульфоселенид кадмия, рубидий, легирование, термостимулированная проводимость, отталкивающий барьер.

Важные для практического применения оптоэлектронные свойства широкозонных полупроводников обусловлены наличием в них центров с глубокими энергетическими уровнями в запрещенной зоне. Они образованы как собственными и примесными дефектами, так и их комплексами.

Эти центры в халькогенидах кадмия и цинка, в зависимости от природы, могут находиться в различных зарядовых состояниях. Кроме того, их структура и свойства существенным образом зависят от условий и режимов воздействия внешних факторов (света, температуры) и в результате этого наблюдаются изменения как спектров поглощения и излучения, так и характера температурных

зависимостей электрофизических свойств полупроводников и приборов на их основе.

В данной работе приведены результаты экспериментального исследования влияния различных режимов предварительного возбуждения образца на параметры некоторых центров прилипания электронов в кристаллах CdS: Rb и $\text{CdS}_x\text{Se}_{1-x}\langle\text{Rb}\rangle$, полученных на основе анализа кривых термостимулированной проводимости (ТСП) и объяснения их особенностей на основе модели центра с отталкивающим барьером.

Методика эксперимента. Кристаллы CdS и $\text{CdS}_x\text{Se}_{1-x}$ исходно имели темновую проводимость $G \cong 10^{-1} - 10 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$. Легирование их примесями Rb производилось в процессе активирующего отжига ($T=920 \text{ К}$, $t=20-60 \text{ мин}$) в инертной среде образцов с предварительно нанесенным методом электролиза слоем легирующего металла. Отжиг приводил к переходу кристаллов в высокоомное ($G_m \cong 10^9 - 10^{10} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$) и фоточувствительное ($G_d/G_m \cong 105 - 107$) состояние.

Параметры центров прилипания электронов в этих кристаллах определялись методами, основанными на анализе спектров термостимулированной проводимости, полученных при двух режимах охлаждения. Кривые ТСП снимались измерениями на кристаллах, охлажденных до температур ($T=90 \text{ К}$) в темноте (режим – I), а для выяснения влияния условия эксперимента на их характер образцы в процессе охлаждения облучались интегральным светом (режим – II), причем перед охлаждением они подвергались дезактивации – нагреву в темноте до 360 К .

Экспериментальные результаты. Результаты исследования параметров центров прилипания методом термостимулированной проводимости, показывают, что низкотемпературные полосы с максимумами при $T_m=130$ и 180 К в кристаллах $\text{CdS}\langle\text{Rb}\rangle$, несмотря на их температурный сдвиг на 50 К , имеют энергии активации $E_t=0.24 \pm 0.01 \text{ эВ}$, а две высокотемпературные полосы ТСП с максимумами при $T_m=300$ и 345 К и температурном сдвиге 47 К – $E_t=0.67 \pm 0.01 \text{ эВ}$.

Аналогичные полосы ТСП в кристаллах $\text{CdS}_x\text{Se}_{1-x}\langle\text{Rb}\rangle$ имеют низкотемпературные максимумы при $T_m=149$ и 200 К со сдвигом на 51 К , а высокотемпературные – при $T_m=245$ и 292 К со сдвигом на 47 К . Величины сдвигов между низко- и высокотемпературными полосами ТСП в $\text{CdS}\langle\text{Rb}\rangle$ и $\text{CdS}_x\text{Se}_{1-x}\langle\text{Rb}\rangle$ имеют значения, соответственно 170 и 96 К . Эти сдвиги, с учетом незначительных

разбросов, вследствие наложения других близко расположенных полос и применения процедуры термоочистки, как мы видим, имеют для низкотемпературных полос одинаковые значения.

В кристаллах $\text{CdS}\langle\text{Rb}\rangle$, подвергнутых возбуждению после их предварительного охлаждения в темноте, наблюдается, слабая по интенсивности, низкотемпературная ТСП. Отсутствие в этих условиях высокотемпературной составляющей, скорее всего, является следствием действия температурного гашения. После аналогичных условий возбуждения, ТСП в кристаллах $\text{CdS}_x\text{Se}_{1-x}\langle\text{Rb}\rangle$ не наблюдается. Однако величина ТСП в исследованных кристаллах обоих типов, после их возбуждения непрерывным освещением в течении всего процесса охлаждения, возрастает на 4 порядка.

Выводы:

- 1) термоопустошение центра представляет собой мономолекулярный процесс, без повторного захвата;
- 2) энергии активации центра (0.24 и 0.67 эВ) определены из кривых ТСП (энергия 0.24 эВ рассчитана из низкотемпературных измерений, а 0.67 эВ – из высокотемпературных измерений);
- 3) данные центры не заполняются возбуждением образца при низких температурах;
- 4) сечение захвата этих центров меняется с ростом температуры, что наиболее четко выражено для кристаллов $\text{CdS}_x\text{Se}_{1-x}\langle\text{Rb}\rangle$;
- 5) интенсивности указанных полос ТСП в зависимости от условий эксперимента изменяются синхронно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Физика соединений A_2B_6 // (Под ред. Георгобиани А.Н., Шейнкмана М.К.). М.: «Наука». 1986. 320 с.
2. Хамидов М.М., Магомедбеков У.Г., Рабаданов М.Х., Хасанов И.И., Солтамурадов Г.Д., Хамидов М.М., Шахбанов Г.М. Особенности фото-, термостимулированных явлений в кристаллах $\text{CdS}\langle\text{K}\rangle$ // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Естественные и точные науки. 2011. №3. С. 17-20.
3. Хамидов М.М., Рабаданов М.Х., Магомедбеков У.Г., Али Рафик М.К. Особенности примесной фото- и термостимулированной проводимости в кристаллах сульфоселенида кадмия, легированных рубидием // Вестник ДГУ. 2013. в. 6 С. 68-73.

РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Э.Ш. Шамов
ДГТУ, Махачкала

Аннотация: в статье рассматриваются приложения теории разностных уравнений к вычислению определителей n -го порядка. Решена задача Коши для полученных разностных уравнений. Рассмотрены все случаи вычисления определителей в зависимости от буквенных параметров.

Ключевые слова: определитель n -го порядка, рекуррентное соотношение, разностное уравнение, задача Коши, характеристическое уравнение.

Исследование и решение многих прикладных задач сводятся к вычислению определителей n -го порядка. Вычислить определитель n -го порядка – это написать формулу, которую будет зависеть от n .

Иногда удается довольно просто вычислить определитель n -го путем разложения его на сумму двух или нескольких определителей.

Никаких общих правил и методов для вычисления определителей n -го порядка не существуют. Однако существует особые методы, позволяющие получать более простые выражения для целого ряда буквенных определителей n -го порядка, а также определителей с числовыми элементами.

Одним из основных методов вычисления определителей n -го порядка является метод рекуррентных соотношений, который состоит в том, что данный определитель n -го порядка выражают через один или несколько определителей того же вида, но низшего порядка. Для этого определитель разлагают по некоторой строке или столбцу. Иногда приходится соответствующим образом преобразовать, а затем уже его разлагать по строке или столбцу.

Равенство, при котором определитель выражается через один или несколько определителей низшего порядка того же вида принято называть рекуррентным или возвратным соотношением.

Рекуррентное соотношение является разностным уравнением.

В данной статье рассматривается приложения теории разностных уравнений к вычислению определителей n -го.

Рассмотрим трёхдиагональный определитель n -го порядка

$$A_n = \begin{vmatrix} c & a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & c & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & c & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c \end{vmatrix} \quad (1)$$

Если $ab = 0$, то определитель (1) является треугольным и равен произведению диагональных элементов $A_n = c^n$. Если $ab \neq 0$, то для вычисления этого определителя разложим его по элементам первой строки, получим

$$A_n = cA_{n-1} - a \cdot \begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & c & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c \end{vmatrix}.$$

Если последний определитель раскрыть по элементам первого столбца, то окончательно получим

$$A_n = cA_{n-1} - abA_{n-2}. \quad (2)$$

Заметим, что

$$A_1 = c \quad \text{и} \quad A_2 = \begin{vmatrix} c & a \\ b & c \end{vmatrix} = c^2 - ab. \quad (3)$$

Таким образом, задача вычисления определителя (1) свелась к решению задачи Коши (2) - (3). Уравнение (2) можно переписать в виде

$$A_{n+2} - cA_{n+1} + abA_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Это линейное однородное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Вид общего решения зависит от вида корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 - c\lambda + ab = 0.$$

Здесь возможны случаи:

1) Если $c^2 > 4ab$, то

$$A_n = C_1 \left(\frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2} \right)^n.$$

2) Если $c^2 = 4ab$, то

$$A_n = C_1 \left(\frac{c}{2}\right)^n + C_2 \cdot n \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^n.$$

3) Если $c^2 < 4ab$, то

$$A_n = (ab)^{\frac{n}{2}} \cdot (C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi),$$

где

$$\cos \varphi = \frac{c}{2\sqrt{ab}}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{4ab - c^2}}{2\sqrt{ab}}.$$

Учитывая, что $\sin \varphi > 0$, аргумент φ можно задать формулой

$$\varphi = \arccos \frac{c}{2\sqrt{ab}}.$$

Значения постоянных C_1 и C_2 легко находятся из начальных условий (3).

Рассмотрим теперь другой определитель n -го порядка

$$B_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b & b \\ -b & a & b & \dots & b & b \\ -b & -b & a & \dots & b & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b & -b & -b & \dots & -b & a \end{vmatrix}.$$

Запишем левый угловой элемент a в виде $a = (a-b) + b$ и представим данный определитель в виде суммы двух определителей

$$B_n = \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -b & a & b & \dots & b & b \\ -b & -b & a & \dots & b & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b & -b & -b & \dots & -b & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & b & \dots & b & b \\ -b & a & b & \dots & b & b \\ -b & -b & a & \dots & b & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b & -b & -b & \dots & -b & a \end{vmatrix}.$$

Первый из складываемых определителей равен $(a-b)B_{n-1}$. Во втором из складываемых определителей первую строку прибавим ко всем последующим, получившийся треугольный определитель равен $b(a+b)^{n-1}$.

Итак

$$B_n = (a-b)B_{n-1} + b(a+b)^{n-1}. \quad (4)$$

Если $a=b$, то $B_n = 2^{n-1} \cdot a^n$. Если $b=0$, то $B_n = a^n$. Если $a+b=0$, то $B_n = 2aB_{n-1}$, $B_1 = a$. Решая задачу Коши, получаем $B_n = 2^{n-1} \cdot a^n$. Во всех остальных случаях (4) является линейным неоднородным разностным

уравнением первого порядка со специальной правой частью. Ищем частное решение в виде $u_n = A(a+b)^n$, получаем $A = \frac{1}{2}$. Общее решение уравнения (4) имеет вид $B_n = C(a-b)^n + \frac{1}{2}(a+b)^n$. Из начального условия $B_1 = a$, находим $C = \frac{1}{2}$. Итак,

$$B_n = \frac{(a-b)^n + (a+b)^n}{2}. \quad (5)$$

Отметим, что все ранее рассмотренные частные случаи значений параметров a и b получаются из общего решения (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.С. Бахвалов. Численные методы/ Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельников. М.: Бином, 2008.
2. А.О. Гельфанд. Исчисление конечных разностей/А.О. Гельфанд. М., Наука, 1967.
3. Г.А. Каменский. Лекции по теории функций комплексного переменного, операционному исчислению и теории разностных уравнений/Г.А. Каменский. – М.: Высшая школа, 2008.
4. Н.М. Матвеев. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, 4-е изд./ Н.М. Матвеев. – Минск: Вышэйшая школа, 1974.
5. А.А. Миролубов. Линейные неоднородные разностные уравнения/ А.А. Миролубов, М.А. Солдатов. М.: Наука, 1986.
6. В.К. Романко. Разностные уравнения/ В.К. Романко. М.: Бином, 2006.

УДК 517.9

МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ УСТОЙЧИВЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДВУХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Э.Ш. Шамов
ДГТУ, Махачкала

Аннотация: в статье рассматривается построение устойчивых линейных системы двух разностных уравнений, используя метод

функций Ляпунова. Приводится пример построения устойчивых систем разностных уравнений для двух положительно определенных квадратичных форм.

Ключевые слова: системы разностных уравнений, тривиальное решение, функция Ляпунова, квадратичная форма, матричное уравнение, условия Рауса-Гурвица.

В работе [1] строятся устойчивые системы двух линейных дифференциальных уравнений. В данной работе строятся устойчивые линейные системы двух разностных уравнений.

Рассмотрим систему линейных разностных уравнений

$$X(t+1) = PX(t), \quad (1)$$

где $X(t+1) = \begin{pmatrix} x(t+1) \\ y(t+1) \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$,

или в скалярном виде:

$$\begin{cases} x(t+1) = p_{11}x(t) + p_{12}y(t), \\ y(t+1) = p_{21}x(t) + p_{22}y(t). \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим задачу об определении устойчивости тривиального решения системы (1) методом функций Ляпунова [2]. Для этого берется положительно определенная квадратичная форма $V = X^T B X$,

где $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$, так, чтобы первая разность квадратичной формы

V , взятая в силу системы (1) была отрицательно определенной, т.е.

$V_{t+1} - V_t = -U_t$, где $U = X^T A X$ – положительно определенная

квадратичная форма и $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Таким образом, из уравнения $V_{t+1} - V_t = -U_t$, получаем матричное уравнение

$$P^T B P - B + A = 0, \quad (3)$$

которое эквивалентно $\frac{n(n+1)}{2}$ скалярным алгебраическим

уравнениям:

$$\begin{cases} (p_{11}^2 - 1)b_{11} + 2p_{11}p_{21}b_{12} + p_{21}^2b_{22} = -a_{11}, \\ p_{11}p_{12}b_{11} + (p_{21}p_{12} + p_{11}p_{22} - 1)b_{12} + p_{21}p_{22}b_{22} = -a_{12}, \\ p_{12}^2b_{11} + 2p_{12}p_{22}b_{12} + (p_{22}^2 - 1)b_{22} = -a_{22}. \end{cases} \quad (4)$$

Кроме того, для системы (2) должны выполняться условия Рауса-Гурвица

$$\begin{cases} (p_{11} - 1)(p_{22} - 1) - p_{12}p_{21} > 0, \\ 2 - 2p_{11}p_{22} + 2p_{12}p_{21} > 0, \\ (p_{11} + 1)(p_{22} + 1) - p_{12}p_{21} > 0. \end{cases} \quad (5)$$

В системе (4) $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$ и a_{11}, a_{12}, a_{22} являются известными, а коэффициенты b_{11}, b_{12}, b_{22} искомой квадратичной формы V – неизвестными. Обозначим определитель системы алгебраических уравнений (5) через Δ , т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_{11}^2 - 1 & 2p_{12}p_{21} & p_{21}^2 \\ p_{11}p_{12} & p_{21}p_{12} + p_{11}p_{22} - 1 & p_{21}p_{22} \\ p_{12}^2 & 2p_{12}p_{22} & p_{22}^2 - 1 \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta \neq 0$, то существует единственная система значений b_{11}, b_{12}, b_{22} , являющаяся решением системы (4).

Таким образом, в случае, когда $\Delta \neq 0$, всегда можно построить и притом единственным образом квадратичную форму V , которая удовлетворяет разностному уравнению $V_{t+1} - V_t = -U_t$.

Если, кроме того, найденная квадратичная форма V является определенно положительной, то невозмущенное движение $x = y = 0$ будет устойчивым и притом асимптотически.

Теперь поставим обратную задачу: по заданным положительно определенным квадратичным формам $V = X^T B X$ и $U = X^T A X$, где $V_{t+1} - V_t = -U_t$ восстановить систему разностных уравнений (2), т.е. найти элементы матрица P : $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$ и потребовать выполнение условий Рауса-Гурвица (5).

Система (4) представляет собой систему из трёх нелинейных уравнений с четырьмя неизвестными $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$. Поэтому выразим любые три неизвестные через четвертую неизвестную. Здесь возможно четыре случая, т.е. любые три неизвестные выражаем через четвертую неизвестную,

Рассмотрим пример.

Пример. По заданным квадратичным формам $V = \frac{1}{2}x^2 + \frac{b}{2}y^2$ и $U = 2ay^2$, где $a > 0$ и $b > 0$ построить устойчивую систему (2).

Решение. Так как $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{b}{2} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$ и подставляя

элементы этих матриц в систему (4), получим:

$$\begin{cases} p_{11}^2 - 1 + \delta_{21}^2 b = 0, \\ p_{11}p_{12} + p_{21}p_{22}b = 0, \\ p_{12}^2 + (p_{22}^2 - 1)b = -4a. \end{cases} \quad (6)$$

Считая неизвестное p_{22} в системе (6) произвольным, выразим p_{11} , p_{12} , p_{21} через p_{22} :

$$p_{21} = \pm \sqrt{\frac{b - 4a - p_{22}^2 b}{b^2 - 4ab}}, \quad p_{11} = \pm \frac{p_{22} b}{\sqrt{b^2 - 4ab}}, \quad p_{12} = \pm \sqrt{b - 4a - p_{22}^2 b},$$

где $b - 4a > 0$ и $b - 4a - p_{22}^2 b \geq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шамов Э.Ш. Построение устойчивых линейных дифференциальных систем двух уравнений. // Вестник ДГТУ. Технические науки. №6. Махачкала, 2004, с. 75-77.

2. Иванов В.А., Чемоданов Б.К., Медведев В.С. Математические основы теории автоматического регулирования. - М.: Высшая школа, 1971, 806 с.

УДК 517.956

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МНОГООБРАЗИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ СЛАБЫМИ СИНГУЛЯРНЫМИ ТОЧКАМИ И ОДНОЙ ВНУТРЕННЕЙ СИНГУЛЯРНОЙ, СВЕРХСИНГУЛЯРНОЙ ЛИНИЕЙ

Б.М. Шоймкулов
Таджикский национальный университет,

Аннотация: в настоящей работе исследована переопределённая система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя слабыми сингулярными точками и одной сингулярной и сверхсингулярной линией.

Ключевые слова: перекрёстные производные, частные производные, условия совместности, система дифференциальных уравнений, сингулярная точка, сингулярная линия, сверхсингулярная линия, переопределенная система.

В статье [1] рассмотрена формальная теория дифференциальных уравнений и ее приложения в компьютерной алгебре.

Статья [2] посвящена исследованию переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных с одной сингулярной и одной слабой сингулярной линией найдено многообразия решений в явном виде, где общее решение которых содержит три произвольных постоянных.

В работе [3] исследована переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной и одной сверх - сингулярной точкой, где общее решение содержит одну произвольную постоянную.

Статья [4] посвящена к теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной слабой сингулярной и двумя сверх - сингулярными линиями.

В работе [5] найдено общее решение переопределённых систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной линией.

Статья [6] посвящена исследованию некоторых переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной и двумя сверх - сингулярными точками.

К теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией в общем случае рассмотрена в [7], где многообразия решений содержит три произвольных постоянных.

Статья [8] посвящена исследованию теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией.

Теория переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной точкой и одной сингулярной линией исследована в работе [9].

Исследованию переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной точкой и одной граничной сверхсингулярной линией посвящена работа [10].

В работе [11] найдены интегральные представления, поставлена и решена граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями.

Через D обозначим прямоугольник $D = \{(x, y) : 0 < x < a_0, 0 < y < b_0\}$. Соответственно обозначим $\Gamma_1 = \{0 < x < a_0, y = 0\}, \Gamma_2 = \{x = 0, 0 < y < b_0\}$.

В области D рассмотрим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{x a_1(x, y)}{r^\alpha} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{f_1(x, y)}{r^\alpha}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{y a_2(x, y)}{r^\beta} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{f_2(x, y)}{r^\beta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{a_3(x, y)}{(y-x)^\gamma} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{f_3(x, y)}{(y-x)^\gamma}, \end{cases} \quad (1)$$

где $a_j(x, y), f_j(x, y) (1 \leq j \leq 3)$ - заданные функции класса $C^1(D) \cap C(\bar{D}), r = \sqrt{x^2 + y^2}, \alpha = const > 0, \beta = const > 0, \gamma = const > 0, u(x, y) \in C^2(D)$ - искомая функция.

1. Пусть в системе (1) $\alpha < 2, \beta < 2, \gamma < 1$:

Функции $a_j(x, y), f_j(x, y) (1 \leq j \leq 3)$ - удовлетворяют следующим условиям

$$a_1(x, y), f_1(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), a_2(x, y), f_2(x, y) \in C^1(\bar{D}), \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{y a_2(x, y)}{r^\beta} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{x a_1(x, y)}{r^\alpha} \right], \quad (3)$$

$$\begin{aligned} r^{\alpha+\beta} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{f_2(x, y)}{r^\beta} \right] + y a_2(x, y) f_1(x, y) = \\ = r^{\alpha+\beta} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{f_1(x, y)}{r^\alpha} \right] + x a_1(x, y) f_2(x, y). \end{aligned} \quad (4)$$

Вводя новую функцию $W = \frac{\partial u}{\partial x}$ из первых двух уравнений системы (1), приходим к решению следующей системы

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{xa_1(x,y)}{r^\alpha} W + \frac{f_1(x,y)}{r^\alpha}, \\ \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{ya_2(x,y)}{r^\beta} W + \frac{f_2(x,y)}{r^\beta}. \end{cases} \quad (5)$$

Пусть выполнено условие (2), (3), (4) и функции $f_1(x,y), f_2(0,y)$ в точке $r = 0$ и точек контура Γ_2 обращаются в нуль, и их поведения определяются из следующих асимптотических формул

$$f_1(x,y) = o(r^{\gamma_1}), \gamma_1 > 0, \quad (6)$$

$$f_2(0,y) = o(y^{\gamma_2}), \gamma_2 > \beta + \gamma - 1. \quad (7)$$

Тогда любое решение системы (5) удовлетворяющим условиям (2), (3), (4) представимо в виде

$$W(x,y) = \exp(\omega_1(x,y)) \left[\exp \omega_2(0,y) c_1 + \int_0^y \frac{f_2(0,\tau)}{\tau^\beta} \exp(-\omega_2(0,\tau)) d\tau + \int_0^x \frac{f_1(t,y) \exp(-\omega_1(t,y))}{(\sqrt{t^2 + y^2})^\alpha} dt \right], \quad (8)$$

где

$$\omega_1(x,y) = \int_0^x \frac{ta_1(t,y)}{(\sqrt{t^2 + y^2})^\alpha} dt, \quad \omega_2(0,y) = \int_0^y \frac{a_2(0,\tau)}{\tau^{\beta-1}} d\tau,$$

c_1 - произвольная постоянная.

Теперь из равенства $W = \frac{\partial u}{\partial x}$ находим

$$u(x,y) = \int_0^x W(t,y) dt + \psi(y), \quad (9)$$

где $\psi(y)$ - произвольная дважды непрерывно - дифференцируемая функция точек контура Γ_2 .

Далее, пусть функции $a_j(x,y), f_j(x,y) (1 \leq j \leq 3)$ - удовлетворяют следующим условиям

$$a_3(x,y), f_3(x,y) \in C_x^1(\bar{D}), \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{a_3(x,y)}{(y-x)^\gamma} \right] + \frac{xa_1(x,y)a_3(x,y)}{r^\alpha(y-x)^\gamma} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{ya_2(x,y)}{r^\beta} \right] + \left(\frac{ya_2(x,y)}{r^\beta} \right)^2, \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{f_3(x,y)}{(y-x)^\gamma} \right] + \frac{a_3(x,y)f_1(x,y)}{r^\alpha(y-x)^\gamma} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{f_2(x,y)}{r^\beta} \right] + \frac{ya_2(x,y)f_2(x,y)}{r^{2\beta}}. \quad (12)$$

Тогда функция $u(x,y)$ представимая в виде (9) должна удовлетворят

третьему уравнению системы (1). Это приведет к следующему условию совместности

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{a_3(x, y)}{(y-x)^\gamma} \exp(\omega_1(x, y)) [\exp(\omega_2(0, y)) (c_1 + \right. \\ & \left. + \int_0^y \frac{f_2(0, \tau)}{\tau^\beta} \exp(-\omega_2(0, \tau)) d\tau) + \int_0^x \frac{f_1(t, y) \exp(-\omega_1(t, y))}{(\sqrt{t^2 + y^2})^\alpha} dt] + \right. \\ & \left. + \frac{f_3(x, y)}{(y-x)^\gamma} \right\} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \exp(\omega_1(x, y)) [\exp(\omega_2(0, y)) (c_1 + \right. \\ & \left. + \int_0^y \frac{f_2(0, \tau)}{\tau^\beta} \exp(-\omega_2(0, \tau)) d\tau) + \int_0^x \frac{f_1(t, y) \exp(-\omega_1(t, y))}{(\sqrt{t^2 + y^2})^\alpha} dt] \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

В этом случае для нахождения $\psi(y)$ имеем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \psi(y)}{dy^2} = \frac{a_3(0, y)}{y^\gamma} \exp(\omega_2(0, y)) (c_1 + \\ & + \int_0^y \frac{f_2(0, \tau)}{\tau^\beta} \exp(-\omega_2(0, \tau)) d\tau) + \frac{f_3(0, y)}{y^\gamma}. \end{aligned} \quad (14)$$

Интегрируя уравнения (14) находим $\psi(y)$ в виде

$$\begin{aligned} \psi(y) = & c_1 \int_0^y \frac{(y-\tau) a_3(0, \tau)}{\tau^\gamma} \exp(\omega_2(0, \tau)) d\tau + \\ & + \int_0^y \frac{(y-\tau)^2 a_3(0, \tau) f_2(0, \tau)}{2\tau^{\beta+\gamma}} \exp(\omega_2(0, y) - \omega_2(0, \tau)) d\tau + \\ & + \int_0^y \frac{(y-\tau) f_3(0, \tau)}{\tau^\gamma} d\tau + c_2 y + c_3. \end{aligned} \quad (15)$$

Если решение вида (15) существует тогда, подставляя это значение $\psi(y)$ из (15) в (9), учитывая (8) находим решение системы (1).

Таким образом, доказано:

Теорема 1. Пусть в системе (1) $\alpha < 2, \beta < 2, \gamma < 1$, функции $a_j(x, y), f_j(x, y) (1 \leq j \leq 3)$ - удовлетворяют условиям (2), (3), (4), (6), (7), (10), (11) и (12) в области D . Тогда любое решение системы (1) из класса $C^2(D)$ представимо в виде

$$u(x, y) = \int_0^x \frac{f_1(t_1, y) \exp(-\omega_1(t_1, y))}{(\sqrt{t_1^2 + y^2})^\alpha} W_1^\alpha(t_1, y) dt_1 +$$

$$\begin{aligned}
& + c_1 \left[\int_0^x \exp(\omega_1(t, y) + \omega_2(0, y)) dt + \int_0^y \frac{(y - \tau) a_3(0, \tau)}{\tau^\gamma} \exp(\omega_2(0, \tau)) d\tau \right] + \\
& + \int_0^y K_1(x, y, \tau) f_2(0, \tau) d\tau + \int_0^y \frac{(y - \tau) f_3(0, \tau)}{\tau^\gamma} d\tau + c_2 y + c_3, \quad (16)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
K_1(x, y, \tau) &= \left[\frac{1}{\tau^\beta} \int_0^x \exp(\omega_1(t_1, y)) dt + \right. \\
& \left. + \frac{(y - \tau)^2 a_3(0, \tau)}{2\tau^{\beta+\gamma}} \right] \exp(\omega_2(0, y) - \omega_2(0, \tau)), \\
W_1^\alpha(t_1, y) &= \int_{t_1}^x \exp(\omega_1(t_1, y)) dt_1,
\end{aligned}$$

c_1, c_2, c_3 - произвольные постоянные.

Замечание 1. Решение вида (16) в окрестности сингулярных точек $r = 0$ и $y = 0$ при выполнении всех условий теоремы 1 непрерывно.

2. Пусть в системы (1) $\alpha < 2, \beta < 2, \gamma = 1$, функции $a_j(x, y), f_j(x, y) (1 \leq j \leq 3)$ - удовлетворяют условиям (2), (3), (4), (6). Тогда любое решение системы (5), находим в виде (8), и учитывая равенства $W = \frac{\partial u}{\partial x}$, получим

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \int_0^x \frac{f_1(t_1, y) \exp(-\omega_1(t_1, y))}{(\sqrt{t_1^2 + y^2})^\alpha} W_1^\alpha(t_1, y) dt_1 + \\
& + c_1 \left[\int_0^x \exp(\omega_1(t, y) + \omega_2(0, y)) dt + \int_0^y \exp(\omega_1(t, y) + \right. \\
& \left. + \omega_2(0, y)) \left(\int_0^y \frac{f_2(0, \tau)}{\tau^\beta} \exp(-\omega_2(0, \tau)) d\tau \right) dt + \psi(y), \quad (17)
\end{aligned}$$

где $\psi(y)$ - произвольная дважды непрерывно - дифференцируемая функция точек контура Γ_2 .

Решение (17) получено при предположении, что коэффициенты системы (1) удовлетворяют условиям (2), (3), (4), (6).

Пусть функции $a_j(x, y), f_j(x, y) (1 \leq j \leq 3)$ - удовлетворяют условиям (10), (11), (12). Тогда функция $u(x, y)$ представимая в виде (17) должна удовлетворять третьему уравнению системы (1). Это приведет к следующему условию совместности

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{a_3(x, y)}{y-x} \exp(\omega_1(x, y)) [\exp(\omega_2(0, y)) (c_1 + \right. \\
& + \int_0^y \frac{f_2(0, \tau)}{\tau^\beta} \exp(-\omega_2(0, \tau)) d\tau + \int_0^x \frac{f_1(t, y) \exp(-\omega_1(t, y))}{(\sqrt{t^2 + y^2})^\alpha} dt] + \\
& \left. + \frac{f_3(x, y)}{y-x} \right\} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \exp(\omega_1(x, y)) [\exp(\omega_2(0, y)) (c_1 + \right. \\
& + \int_0^y \frac{f_2(0, \tau)}{\tau^\beta} \exp(-\omega_2(0, \tau)) d\tau + \int_0^x \frac{f_1(t, y) \exp(-\omega_1(t, y))}{(\sqrt{t^2 + y^2})^\alpha} dt] \}. \quad (18)
\end{aligned}$$

Используя равенства (18) из третьего уравнения системы (1), получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 \psi(y)}{dy^2} = \frac{a_3(0, y)}{y} \exp(\omega_2(0, y)) (c_1 + \\
& + \int_0^y \frac{f_2(0, \tau)}{\tau^\beta} \exp(-\omega_2(0, \tau)) d\tau) + \frac{f_3(0, y)}{y}. \quad (19)
\end{aligned}$$

Выражение

$$\frac{f_3(0, y)}{y}$$

не интегрируемая в точки $y = 0$. В этом случае, интегрируя выражения

$$\frac{f_3(0, y) - f_3(0, 0)}{y},$$

когда функция $f_3(0, y)$ удовлетворяет условию

$$|f_3(0, y) - f_3(0, 0)| \leq H_1 y^{\gamma_3}, H_1 = \text{const} > 0, \gamma_3 > 0, \quad (20)$$

находим $\psi(y)$ в виде

$$\begin{aligned}
\psi(y) = & c_1 \int_0^y \frac{(y-\tau)(a_3(0, \tau) \exp(\omega_2(0, \tau)) - a_3(0, 0))}{\tau} d\tau + \\
& + \int_0^y \frac{(y-\tau)^2 a_3(0, \tau) f_2(0, \tau)}{2\tau^{\beta+1}} \exp(\omega_2(0, y) - \\
& - \omega_2(0, \tau)) d\tau + \int_0^y \frac{(y-\tau)(f_3(0, \tau) - f_3(0, 0))}{\tau} d\tau + \\
& + (c_1 a_3(0, 0) + f_3(0, 0)) [y \ln y - y] + c_2 y + c_3, \quad (21)
\end{aligned}$$

При выполнении условие (20) выражения

$$\frac{f_3(0, y) - f_3(0, 0)}{y}$$

в $y = 0$ непрерывно и обеспечивает сходимость интеграла

$$\int_0^y \frac{f_3(0, \tau) - f_3(0, 0)}{\tau} d\tau.$$

Далее, пусть функция $a_3(0, \tau)$ в окрестности точек контура Γ_2 удовлетворяет условию

$$|a_3(0, y) \exp(\omega_2(0, y)) - a_3(0, 0)| \leq H_2 y^{\gamma_4}, H_2 = \text{const} > 0, \gamma_4 > 0, \quad (22)$$

Функция $f_2(0, y)$ в окрестности точек контура Γ_2 обращается в нуль и поведение определяется асимптотической формулой

$$f_2(0, y) = o(y^{\gamma_5}), \gamma_5 > \beta. \quad (23)$$

Если существует решение вида (21), тогда подставляя значение $\psi(y)$ из (21) в (17) находим общее решение системы (1).

Таким образом, доказано:

Теорема 2. Пусть в системе (1) $\alpha < 2, \beta < 2, \gamma = 1$, функции $a_j(x, y), f_j(x, y)$ ($1 \leq j \leq 3$) – удовлетворяют условиям (2), (3), (4), (6), (10), (11), (12), (20), (22) и (23) в области D . Тогда любое решение системы (1) из класса $C^2(D)$ представимо в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \int_0^x \frac{f_1(t_1, y) \exp(-\omega_1(t_1, y))}{(\sqrt{t_1^2 + y^2})^\alpha} W_1^\alpha(t_1, y) dt_1 + c_1 \left[\int_0^x \exp(\omega_1(t, y) + \right. \\ & \left. + \omega_2(0, y)) dt + \int_0^y \frac{(y - \tau)(a_3(0, \tau) \exp(\omega_2(0, \tau)) - a_3(0, 0))}{\tau} d\tau \right] + \\ & + \int_0^y K_2(x, y, \tau) f_2(0, \tau) d\tau + \int_0^y \frac{(y - \tau)(f_3(0, \tau) - (f_3(0, 0)))}{\tau} d\tau + \\ & + (c_1 a_3(0, 0) + f_3(0, 0)) [y \ln y - y] + c_2 y + c_3, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} K_2(x, y, \tau) = & \left[\frac{1}{\tau^\beta} \int_0^x \exp(\omega_1(t, y)) dt + \right. \\ & \left. + \frac{(y - \tau)^2 a_3(0, \tau)}{2\tau^{\beta+1}} \right] \exp(\omega_2(0, y) - \omega_2(0, \tau)), \end{aligned}$$

c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.

Замечание 2. Решение вида (24) в окрестности сингулярных точек $r = 0$ и $y = 0$ при выполнении всех условий теоремы 2 непрерывно.

3. Пусть в системы (1) $\alpha < 2, \beta < 2, \gamma > 1$, функции $a_j(x, y), f_j(x, y) (1 \leq j \leq 3)$ – удовлетворяют условиям (2), (3), (4), (6). Тогда любое решение системы (5) учитывая равенства $W = \frac{\partial u}{\partial x}$, находим в виде (17). При выполнении условия (10), (11), (12) функция $u(x, y)$ представляемая в виде (17) должна удовлетворять третьему уравнению системы (1). Отсюда, приходим к следующему условию совместности

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{a_3(x, y)}{(y-x)^\gamma} \exp(\omega_1(x, y)) [\exp(\omega_2(0, y)) (c_1 + \right. \\ & + \int_0^y \frac{f_2(0, \tau)}{\tau^\beta} \exp(-\omega_2(0, \tau)) d\tau) + \int_0^x \frac{f_1(t, y) \exp(-\omega_1(t, y))}{(\sqrt{t^2 + y^2})^\alpha} dt] + \\ & + \left. \frac{f_3(x, y)}{(y-x)^\gamma} \right\} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \exp(\omega_1(x, y)) [\exp(\omega_2(0, y)) (c_1 + \right. \\ & + \int_0^y \frac{f_2(0, \tau)}{\tau^\beta} \exp(-\omega_2(0, \tau)) d\tau) + \int_0^x \frac{f_1(t, y) \exp(-\omega_1(t, y))}{(\sqrt{t^2 + y^2})^\alpha} dt] \}. \end{aligned} \quad (25)$$

Используя равенства (25) из третьего уравнения системы (1) имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \psi(y)}{dy^2} = \frac{a_3(0, y)}{y^\gamma} \exp(\omega_2(0, y)) [(c_1 + \\ & + \int_0^y \frac{f_2(0, \tau)}{\tau^\beta} \exp(-\omega_2(0, \tau)) d\tau] + \frac{f_3(0, y)}{y^\gamma}. \end{aligned} \quad (26)$$

Пусть функции $f_3(0, y)$ и $a_3(x, y)$ в окрестности точек контура Γ_2 удовлетворяют условиям

$$|f_3(0, y) - f_3(0, 0)| \leq H_3 y^{\gamma_6}, H_3 = \text{const} > 0, \gamma_6 > \gamma - 1, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & |a_3(0, y) \exp(\omega_2(0, y)) - a_3(0, 0)| \leq H_4 y^{\gamma_7}, \\ & H_4 = \text{const} > 0, \gamma_7 > \gamma - 1. \end{aligned} \quad (28)$$

Тогда решая уравнение (26), находим $\psi(y)$ в виде

$$\begin{aligned} \psi(y) = & c_1 \int_0^y \frac{(y-\tau)(a_3(0, \tau) \exp(\omega_2(0, \tau)) - a_3(0, 0))}{\tau^\gamma} d\tau + \\ & + \int_0^y \frac{(y-\tau)^2 a_3(0, \tau) f_2(0, \tau)}{2\tau^{\beta+\gamma}} \exp(\omega_2(0, y)) - \end{aligned} \quad (29)$$

$$-\omega_2(0, \tau))d\tau + \int_0^y \frac{(y - \tau)(f_3(0, \tau) - f_3(0, 0))}{\tau^\gamma} d\tau + \\ + \frac{(c_1 a_3(0, 0) + f_3(0, 0))}{(\gamma - 1)(\gamma - 2)y^{\gamma-2}} + c_2 y + c_3.$$

Если существует решение вида (29), тогда подставляя значение $\psi(y)$ из (29) в (17) находим решение системы (1).

Таким образом, доказана

Теорема 3. Пусть в системе (1) $\alpha < 2, \beta < 2, \gamma > 1$, функции $a_j(x, y), f_j(x, y) (1 \leq j \leq 3)$ - удовлетворяют условиям (2), (3), (4), (6), (7), (10), (11), (12), (27), (28) в области D . Тогда любое решение системы (1) из класса $C^2(D)$ представимо в виде

$$u(x, y) = \int_0^x \frac{f_1(t_1, y) \exp(-\omega_1(t_1, y))}{(\sqrt{t_1^2 + y^2})^\alpha} W_1^\alpha(t_1, y) dt_1 + \\ + c_1 \left[\int_0^x \exp(\omega_1(t, y) + \omega_2(0, y)) dt + \right. \\ \left. + \int_0^y \frac{(y - \tau)(a_3(0, \tau) \exp(\omega_2(0, \tau) - a_3(0, 0)))}{\tau} d\tau + \right. \quad (30) \\ \left. + \int_0^y K_3(x, y, \tau) f_2(0, \tau) d\tau + \int_0^y \frac{(y - \tau)(f_3(0, \tau) - f_3(0, 0))}{\tau^\gamma} d\tau + \right. \\ \left. + \frac{(c_1 a_3(0, 0) + f_3(0, 0))}{(\gamma - 1)(\gamma - 2)y^{\gamma-2}} + c_2 y + c_3, \right.$$

где

$$K_3(x, y, \tau) = \left[\frac{1}{\tau^\beta} \int_0^x \exp((\omega_1(t, y)) dt + \right. \\ \left. + \frac{(y - \tau)^2 a_3(0, \tau)}{2\tau^{\beta+\gamma}} \right] \exp(\omega_2(0, y) - \omega_2(0, \tau)),$$

c_1, c_2, c_3 - произвольные постоянные.

Замечание 3. Решение вида (30) в окрестности сингулярных точек $r = 0$ и $y = 0$ при выполнении всех условий теоремы 3 обращается в бесконечность с асимптотическим поведением $u(x, y) = O(y^{-(\gamma-2)})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. W.M. Seiler, Involution. The Formal Theory of Differential Equations and its Applications in Computer Algebra, Springer, 2010. p.650.

2. Шоймкулов Б.М. Интегральные представления многообразия решений для переопределенных систем с одной сингулярной и одной слабой сингулярной линией // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. № 1 (48). С. 21-25.

3. Шоймкулов Б.М. Переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной и одной сверхсингулярной точкой // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. № 3 (50). С. 17-23.

4. Шоймкулов Б.М. К теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной слабой сингулярной и двумя сверхсингулярными линиями// Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. № 4 (51). С. 24-28.

5. Шоймкулов Б.М. Об одной переопределённой системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной линией // Вестник Филиала Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе. 2020. № 3 (15). С. 22-33.

6. Шоймкулов Б.М. О некоторых переопределенных системах дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной и двумя сверхсингулярными точками// Электронный инновационный вестник. 2020. № 1 (12). С. 4-11.

7. Шоймкулов Б.М., Лукмон Р.М.С. К теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией в общем случае // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2021. № 2 (53). С. 10-15.

8. Шоймкулов Б.М. К теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2021. № 2 (53). С. 5-9.

9. Шоймкулов Б.М. К теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной точкой и одной сингулярной линией //

Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2021. № 4 (55). С. 14-18.

10. Шоймкулов Б.М. Переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной точкой и одной граничной сверхсингулярной линией // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. №3(58). С. 18-24.

11. Раджабов Н. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями. Душанбе, изд. ТГУ, ч. № I, 1980г, 126 стр., ч. № II, 1981, стр.170., ч. № III.1982г, 170 с.

УДК 378.1

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ФИЛИАЛЕ ДАГЕСТАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА В Г. ДЕРБЕНТЕ

Э.Т. Эмирбеков
филиал ДГТУ, Дербент

Аннотация: в статье приводятся некоторые особенности математической подготовки инженерных кадров в филиале ДГТУ в г. Дербенте, основные проблемы преподавания математики и пути их решения.

Ключевые слова: качество образования, входной контроль, систематизация знаний, компетенции, бакалавриат, магистратура, программный продукт.

Как известно [1], целью государственной политики в области образования является повышение качества образования, соответствующего современным требованиям и обеспечение потребностей экономики в квалифицированных кадрах. По данным министерства науки и высшего образования РФ, в последние годы наблюдается рост потребности в выпускниках инженерно-технических направлений подготовки [2,3]. В связи с этим, перед техническими вузами стоит задача подготовки высококвалифицированных выпускников-инженеров, отвечающих вызовам современности.

Дербентский филиал ДГТУ уже много лет успешно и плодотворно решает государственную программу по подготовке

инженерных кадров. За период своего существования филиал подготовил более тысячи специалистов и бакалавров по направлениям «Строительство», «Технология транспортных процессов», «Прикладная информатика», «Информатика и вычислительная техника» и т.д. В филиале проводится большая работа по развитию материальной базы, совершенствованию технологии обучения, методики преподавания, накоплен определенный опыт педагогической работы.

Математика для инженеров является основным инструментом для описания и моделирования производственных задач. Она также способствует развитию личности [4], а именно формирует такие черты характера, как: активность, правильное восприятие окружающей действительности, целеустремленность, необходимость доказательства и обоснованности положений и др. По этим и другим причинам математика в техническом вузе является обязательным предметом для всех направлений подготовки.

В Дербентском филиале ДГТУ студенты, в зависимости от направления подготовки, изучают математику на протяжении двух или трех первых семестров. К основным разделам математики относятся: линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия, дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных, обыкновенные дифференциальные уравнения, числовые ряды, элементы теории поля, теорию вероятностей, математическую статистику, вычислительные методы. Усвоение этих разделов математики дает возможность студентам применять полученные знания в решении технических задач профессиональной области.

Следует отметить, что в процессе преподавания математики в филиале возникают некоторые проблемы, такие как:

- сокращение количества аудиторных часов, выделяемых на изучение математики по некоторым направлениям подготовки;
- недостаточная подготовленность школьников по математике;
- отсутствие навыков самостоятельной работы у студентов и др.

Анализ результатов единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике за последние годы [5] свидетельствует о том, что средний балл по стране не превышает пятидесяти баллов (45-50), а минимальное количество баллов, необходимое для сдачи экзамена, с каждым годом уменьшается. Отсюда следует, что выпускники школ недостаточно подготовлены к обучению в вузе. По этой причине, для

студентов всех направлений подготовки в филиале проводится входной контроль по математике для проверки остаточных знаний. Обычно входной контроль проводится на первом или втором практическом занятии в виде теста школьного уровня. Сопоставляя результаты входного контроля студентов с результатами ЕГЭ, можно заметить, что средний балл входного контроля ниже среднего балла ЕГЭ. Таким образом, входной контроль дает возможность преподавателю определить уровень математической подготовленности студентов каждой академической группы, выделить разделы и темы элементарной математики, которые вызывают наибольшие трудности, определить пути последующей работы со студентами. Кроме того, на начальном этапе обучения в вузе обязательным условием становится проведение дополнительных консультаций по математике. Консультации следует проводить не только в первом семестре, но и на протяжении всех семестров изучения математики. В филиале имеется положительный опыт проведения таких консультаций. В первом семестре, консультации необходимо проводить по систематизации школьных знаний по математике и формированию приемов учебно-познавательной деятельности, необходимой для изучения курса высшей математики в техническом вузе.

Важнейшей задачей начального этапа математической подготовки является овладение студентами умений самостоятельной работы с учебными материалами [6] (изучение литературы, работа с конспектом лекций, составление рефератов, решение задач и упражнений, выполнение расчетов и т. д.). Как показывает практика, самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня. На данном этапе студенты имеют возможность консультироваться с преподавателем по всем видам выполняемых работ и получить дополнительные знания по предмету. Все это повышает мотивацию к качественному изучению математики, так как вызывает чувство успешности у студентов.

Для организации нормальной учебной деятельности студентов в филиале созданы все необходимые условия: имеется библиотека, читальный зал, оснащенные необходимой литературой и учебно-методическими материалами, которые размещены также в библиотечно-информационном комплексе университета (в личном

кабинете преподавателя). Студенты также могут пользоваться и электронной библиотекой.

Преподавателями филиала изданы различные методические указания по разделам элементарной и высшей математики. Для изучения разделов высшей математики изданы учебные пособия [7,8], в которых подробно описаны основные изучаемые разделы математики с подробным разбором типовых задач, а также с набором заданий для самостоятельного решения. Ниже приводится как пример, план проведения одного из практических занятий по разделу «Системы линейных уравнений».

Тема: системы линейных алгебраических уравнений. Методы Крамера и обратной матрицы»

Цель занятия: формирование навыков решения систем линейных алгебраических уравнений методами Крамера и обратной матрицы.

Задачи:

- развитие творческого профессионального мышления;
- овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;
- овладение умениями и навыками постановки и решения задач;
- углубление теоретической и практической подготовки;
- развитие инициативы и самостоятельности студентов.

План проведения практического занятия.

1. Организационный момент.

- Создание рабочей обстановки.
- Проверка домашнего задания

2. Повторение теоретического материала

- Что называется системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)?
- Какие случаи могут представиться при решении СЛАУ?
- Какие СЛАУ называются совместными, несовместными?
- Напишите формулы Крамера. В каком случае они применимы?
- При каком условии СЛАУ имеет единственное решение?
- Что можно сказать о СЛАУ, если ее определитель равен нулю?
- Как записать СЛАУ в матричном виде?
- Каков алгоритм решения СЛАУ методом обратной матрицы?

3. Выполнение заданий совместно с преподавателем.

Задание 1. Решить систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Решение. Алгоритм решения:

Шаг 1. Находим главный определитель:

$$\begin{aligned} \Delta = \det A &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \cdot (-4 - 2) + 2 \cdot (-3 + 4) + 4 \cdot (-3 - 8) = -18 + 2 - 44 = -60 \neq 0. \end{aligned}$$

Та как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение.

Шаг 2. Находим вспомогательные определители путем разложения определителя, например, по элементам первой строки:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 21 & -2 & 4 \\ 9 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 21 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= 21 \cdot (-4 - 2) + 2 \cdot (-9 + 20) + 4 \cdot (-9 - 40) = -300; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 3 & 21 & 4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 2 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} - 21 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \cdot (-9 + 20) - 21 \cdot (-3 + 4) + 4 \cdot (30 - 18) = 60; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & 21 \\ 3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \cdot (40 + 9) - 3 \cdot (-20 + 21) + 2 \cdot (-18 - 84) = -60; \end{aligned}$$

Шаг 3. По формулам Крамера находим неизвестные переменные:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-300}{-60} = 5, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{60}{-60} = -1, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-60}{-60} = 1.$$

Задание 2. Решить систему уравнений, приведенную в предыдущем задании, методом обратной матрицы.

Решение. Алгоритм решения:

Шаг 1. Находим главный определитель системы. Мы его нашли в задании 1: $\Delta = -60 \neq 0$. Система имеет единственное решение.

Шаг 2. Запишем систему в виде матричного уравнения $A \cdot X = B$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Для решения матричного уравнения умножим его слева (или справа) на обратную матрицу: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, где $A^{-1} \cdot A = E$.

Отсюда

$$X = A^{-1}B.$$

Согласно последней формуле для нахождения матрицы X нужно найти обратную матрицу A^{-1} и выполнить матричное умножение $A^{-1} \cdot B$.

Шаг 3. Находим обратную матрицу по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A},$$

где \tilde{A} союзная матрица (транспонированная матрица алгебраических дополнений элементов матрицы A).

Порядок нахождения обратной матрицы следующий:

1) вычисляем миноры элементов матрицы

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6; \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1;$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11; \quad M_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6;$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11; \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1;$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 16 = -12; \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 12 = -18;$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 6 = 18;$$

Составляем матрицу миноров:

$$M = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -11 \\ 6 & -11 & 1 \\ -12 & -18 & 18 \end{pmatrix}.$$

2) По формуле $A_{ij} = (-1)^{-1} \cdot M_{ij}$ матрицу миноров преобразуем в матрицу алгебраических дополнений:

$$\begin{pmatrix} -6 & -1 & -11 \\ -6 & -11 & -1 \\ -12 & 18 & 18 \end{pmatrix}.$$

3) Транспонируем эту матрицу и получим союзную матрицу:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -12 \\ -1 & -11 & 18 \\ -11 & -1 & 18 \end{pmatrix}.$$

4) Находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{-60} \begin{pmatrix} -6 & -6 & -12 \\ -1 & -11 & 18 \\ -11 & -1 & 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 12 \\ 1 & 11 & -18 \\ 11 & 1 & -18 \end{pmatrix}.$$

Шаг 4. Находим решение системы по формуле:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 12 \\ 1 & 11 & -18 \\ 11 & 1 & -18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 300 \\ -60 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Подведение итогов практического занятия:

- отметить недостатки в работе обучающихся;
- отметить достигнутые успехи;
- отметить пути дальнейшего совершенствования знаний и умений.

Как известно [9], важным фактором подготовки конкурентностного выпускника вуза является формирование у него компетенций научно-исследовательской направленности. Поэтому важнейшим элементом учебного процесса в филиале является научно-исследовательская деятельность студентов. Принимая участие в научно-исследовательской деятельности, студенты чувствуют свою важность и престижность, и это является хорошим «толчком» для изучения дополнительной литературы, проведения самостоятельного исследования, составления научного доклада. С этой целью крайне полезным является, привлечение студентов к учебно-исследовательской деятельности начиная с первого курса.

Кафедра ЕГОиСД филиала вместе с преподавателями математики в течение учебного года проводят научно-практические семинары, а в апреле - итоговая научно-практическая конференция студентов, в рамках которой студенты представляют свои работы.

Многие из этих работ носят реферативный характер, но каждая из них включает в себя все этапы научно-исследовательского поиска: цель, постановка задачи исследования, математическое моделирование, необходимые расчеты, анализ полученных результатов и выводы. Лучшие работы студентов публикуются в сборниках научных трудов кафедры и университета.

Приведем примерные темы рефератов и докладов студентов на научно-практических семинарах и итоговых научных конференциях: «Парадоксы теории множеств», «Метод математической индукции», «Основная теорема алгебры», «Элементы математической логики», «Кодирование информации», «Геометрия Лобачевского», «Геометрия Римана», «Приложения производной к задачам экономики», «Линейное программирование в экономике», «Оптимизационные методы в экономике», «Моделирование транспортных задач», «Применение геометрических объектов в строительстве» и т.д.

Как свидетельствует опыт работы в филиале, участие студентов первого и второго курсов в научных конференциях разного уровня позволяет им включаться в научно-исследовательскую работу, учиться у студентов старших курсов, испытать и проверять свои силы. Студенты, участвующие в научных конференциях с первого курса, в старших курсах демонстрируют большую активность в научной жизни университета, представляют качественные научные доклады и проекты уже в своей профессиональной области. Важно отметить, что при составлении научных докладов у студентов формируются умения, позволяющие им корректно записывать математические выражения, составлять алгоритмы и пользоваться программными продуктами.

Кафедра филиала ЕГОиСД оснащена компьютерными классами, в котором проводятся занятия для студентов с использованием математических пакетов Mathcad, MS Excel и др. Применение математических пакетов Mathcad и MS Excel позволяет сформировать у студентов важные профессиональные компетенции, которые позволят им качественно и быстро проводить расчеты при решении задач и примеров [10]. В программном пакете Mathcad существует множество встроенных функций, позволяющих реализовать решение различных типовых и нетиповых математических задач. На начальном этапе работы в Mathcad занятия должны проводиться под руководством преподавателя, чтобы студенты получили первоначальный опыт решения задач. Впоследствии студенты легко

осваивают данный пакет и пользуются им при решении задач в своей профессиональной области.

В заключении отметим, что процесс обучения студентов математике является сложным и многогранным. Поэтому перед преподавателями математики стоят задачи поиска новых методик, технологий и средств обучения, позволяющих воспитать и обучать выпускников, отвечающих всем вызовам современности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федеральный закон "Об образовании в Российской Федерации" от 29.12.2012 N 273-ФЗ.

2. Материалы Круглого стола «Инженерия будущего – новые вызовы перед системой образования» Екатеринбург: УрФУ, Высшая инженерная школа, 18.02.2014.

3. Воробьев А.Е., Мурзаева А.К. Модернизация российского высшего технического образования // Сибирский педагогический журнал. 2018. № 1. С. 157–162.

4. Морозова И.К., Ткачева В.В. Роль математики в развитии логического мышления у школьников // Наука и образование сегодня. 2017. № 11 (22).

5. И.В. Яценко, И.Р. Высоцкий, А.В. Семенов. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2023 года по математике. Москва, 2023.

6. Сотникова О.А., Хозяинова М.С., Хабаева Е.В. О некоторых задачах начального этапа профессиональной подготовки бакалавров технического вуза при изучении математики // Казанская наука. 2017. № 9. С. 117–119.

7. Эмирбеков Э.Т. Высшая математика: учебник и практикум. Часть 1. / Э.Т. Эмирбеков. – Махачкала: Изд-во АЛЕФ, 2023. – 446с.

8. Эмирбеков Э.Т. Высшая математика: учебник и практикум. Часть 2. / Э.Т. Эмирбеков. – Москва: РОСА, 2021. – 293с.

9. Бодряков В.Ю., Ушакова Л.Р. Практический опыт формирования исследовательских компетенций студентов, обучающихся по направлению «01. 03. 02 – Прикладная математика и информатика» // Педагогическое образование в России. 2015. №7.

10. Сотникова О.А., Хозяинова М.С. Особенности обучения математике с использованием математических программных продуктов в высшем образовании // Математическое моделирование

и информационные технологии: сб. ст. Междунар. науч. конф. (10–11 ноября 2017 г., г. Сыктывкар) / отв. ред. А.В. Ермоленко. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2017. С. 120–122.

УДК 537.527.523

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ ГАЗОВ

К.А. Эфендиев
ДГТУ, Махачкала.

Аннотация: в статье приводятся результаты экспериментального исследования роли поляризации в явлениях пробоя и каналирования газовых разрядов, влияния ультрафиолетового облучения искры на время формирования пробоя, время спада напряжения, когда пробиваемый промежуток находится в режиме недонапряжения. В работе даны результаты экспериментального исследования механизма каналирования разряда в газах.

Ключевые слова: газовый разряд, мощность облучения, поляризация, время формирования пробоя, напряжение пробоя, время спада напряжения, пространственный заряд, стример, искровой канал.

Исследование диэлектрической прочности различных газов, имеет значение как для решения вопроса о механизме пробоя газов, так и в высоковольтной технике, в которой газы используются в качестве изоляции.

Проведенные исследования показали, что:

а) Не наблюдается никакой связи между диэлектрической прочностью газа и потенциалом ионизации его молекул и атомов, хотя по Таунсенду такая связь должна иметь место.

б) Для разных газов, состоящих из однотипных молекул, можно проследить, что газы с большей поляризуемостью обладают и большей прочностью.

в) Условие пробоя Ретера ($\alpha = \text{const}$):

$$\alpha d = 17,7 + \ln d \quad (1)$$

где d - длина газового промежутка.

Пробой газа определяется в основном величиной первого коэффициента Таунсенда α , а пробивная прочность - условиями роста этого коэффициента с возрастанием напряженности электрического поля. Повышенная пробивная прочность у некоторых газов объясняется тем, что в этих газах неупругие потери энергии велики, электроны медленно накапливают энергию, достаточную для ионизации.

Поляризация плазмы в головке лавины, достигшей критического усиления, учитывается в плазменной теории пробоя, разработанной в работах [1], согласно которой плазма в головке лавины поляризуется в электрическом поле. При этом поле поляризации внутри головки направлено против внешнего поля. Таким образом, поле внутри головки уменьшается, а поле перед головкой лавины и позади неё усиливается. Благодаря ослаблению поля внутри головки усиливается рекомбинация положительных ионов и электронов. Рекомбинационное излучение через фотоионизацию частиц газа создает электроны, которые путем образования новых электронных лавин, расширяют области, занятые плазмой. Этот процесс повторяется до тех пор, пока плазма не замкнет электроды газового промежутка. Следовательно, вопросы о пробое газов и причинах, определяющих различную пробивную прочность разных газов, непосредственно связаны с условиями движения электронов в электрическом поле. Скорость развития лавины электронов является функцией не только $\frac{E}{P}$, но и существенно зависит от природы газа. В этой связи в работе [2], были определены скорости развития электронных лавин, исследуя импульсный пробой гелия, воздуха и элегаза (SF_6); пробивная прочность которых меняется в широких пределах, в зависимости от отношения напряженности поля E к давлению P , считая, что скорость развития электронной лавины непосредственно связана со скоростью движения электронов.

При определении скорости развития электронных лавин в работе [2] исходили из представлений стримерно-однолавиной теории пробоя. При приложении к газовому промежутку импульса напряжения, достаточного для пробоя, от катода к аноду развивается лавина электронов, которая переходит в положительный стример, распространяющийся к катоду, со скоростью на порядок больше, чем скорость развития лавины электронов. Поэтому можно считать, что время формирования разряда, в основном, определяется временем

развития электронной лавины. Если создать такие условия эксперимента, при которых лавина электронов проходит всю длину газового промежутка, то частное от деления длины газового промежутка на время формирования разряда с достаточным приближением можно принять за скорость развития лавины электронов.

В существующих теориях пробоя остается открытым вопрос учета влияния поляризуемости на диэлектрическую прочность газов.

В связи с обсуждением вопроса о зависимости напряжения пробоя от поляризуемости молекул газа, представляют интерес результаты экспериментальных исследований с целью изучения влияния капель дождя на механизм формирования молнии. Нами был исследован пробой воздушного промежутка в условиях созданного эффекта дождя между электродами.

Фотоаппарат зафиксировал следующую картину пробоя (рис. 1а). При приложении импульса напряжения капли жидкости поляризовались и приняли форму эллипсоидов вращения.

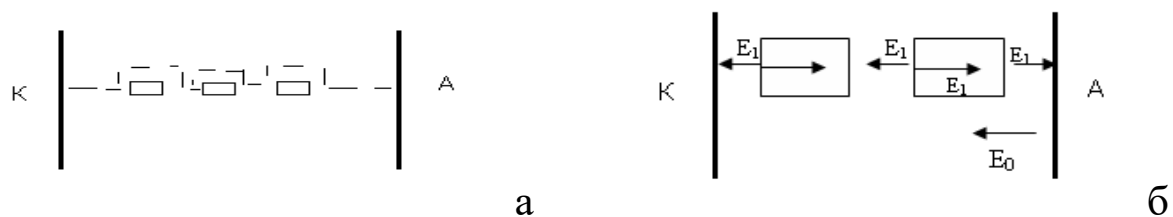


Рис.1: а) Картина пробоя газового промежутка при наличии в нем капель дистиллированной воды. Канал разряда изображен пунктирной линией; б) Поляризация капель воды в электрическом поле. E_0 - напряженность поля, приложенного к электродам. E_1 - поле поляризации капель воды.

Из данных рис. 1а видно, что канал разряда (пунктир) проходил от электродов до капель, между каплями по прямым линиям, но обходил капли по поверхности. Из данных рис. 1б видно, что между электродами и ближайшими к ним каплями внешнее приложенное поле E_0 совпадает по направлению с полем поляризации. То же самое имеет место между каплями. Внутри капель внешнее приложенное поле направлено против поля поляризации, что ведет к уменьшению суммарного поля в капле, которое недостаточно для пробоя

дистиллированной воды. По нашему мнению, развитие пробоя начинается в усиленном поле между электродами и ближайшими поляризованными каплями. Далее разряд развивается по поверхности капель, так как пробивная прочность поверхностного пробоя капли на границе воды и воздуха гораздо меньше, чем та же величина для дистиллированной воды. Таким образом, этот факт также подтверждает, что поляризация капель играет определенную роль в явлении электрического пробоя газов.

Целью настоящей работы являлось экспериментальное исследование электрического пробоя гелия, аргона, азота, воздуха и элегаза (SF_6), пробивная прочность которых меняется в широких пределах, в режиме недонапряжения, когда газовый промежуток облучается светом искрового разряда при различных давлениях и длинах газовых промежутков.

Надо отметить, что молекулы поляризуются под воздействием электрического поля, приложенного к газовому промежутку. Вектор поляризации устанавливается по полю, а тепловое движение стремится нарушить этот порядок. Пусть трубка, образованная силовыми линиями однородного электрического поля, заполнена поляризованными молекулами (рис.2).

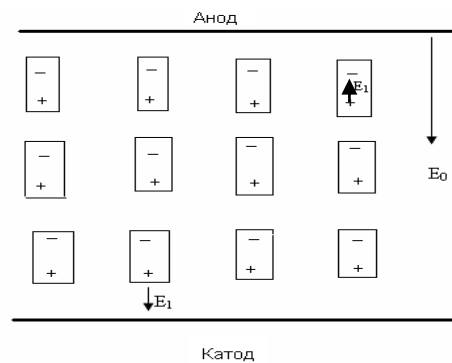


Рис. 2. Перераспределение поля в газовом промежутке из-за поляризации молекул.

Поляризация усиливает внешнее электрическое поле у поверхности электродов, а также между молекулярными плоскостями и поле становится равным:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 \quad (2)$$

где E_0 - напряженность поля, приложенного к электродам; E_1 - поле поляризации капель воды.

Поле в молекулярных плоскостях ослабляется и равно:

$$\vec{E}' = \vec{E}_0 - \vec{E}_1 \quad (3)$$

Это может быть одной из причин каналирования газовых разрядов, включая микроканалирование канала искры. Упорядоченное расположение молекул как показано на рис.2, может существовать кратковременно из-за теплового движения молекул. За это короткое время может произойти разряд с образованием катодных и анодных пятен,

В работе [3] было установлено, что искровой канал диаметром $0,1 \div 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ представляет собой совокупность большого числа (100-1000) микроканалов диаметром $5 \div 10 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ равномерно распределенных по сечению канала. По мнению авторов работы [3] микроканалы возникают из-за неустойчивости фронта ионизации. По нашему мнению, одной из причин неустойчивости фронта ионизации могут служить микрополя поляризации молекул.

В работе [4] было проведено экспериментальное исследование поверхностной электрической прочности сегнетоэлектриков и предложена теория пробоя. Экспериментально было установлено, что напряжение пробоя сегнетоэлектриков (пробивная прочность) больше в случае, когда вектор поляризации образца параллелен вектору внешнего приложенного поля E_0 , чем в случае, когда эти векторы антипараллельны. В работе дано объяснение этому явлению. В первом случае поляризация образца усиливается, электроны закреплены полем поляризации, что требует дополнительных затрат энергии и, следовательно, повышения напряжения пробоя, а во втором случае происходит переполаризация образца, электроны на короткое время освобождаются от поля поляризации и за это время происходит пробой при меньших напряжениях.

Все вышеизложенное свидетельствует о том, что поляризация влияет не только на пробой газов, но и на электрический пробой жидких и твердых диэлектриков.

В общем случае спад напряжения на пробиваемом газовом промежутке является многоступенчатым, что, по нашему мнению, связано с процессами на катоде: фотоэффект на катоде и в газе, бомбардировка положительными ионами катода, взрывная эмиссия, пробой изоляционных пленок на катоде. В зависимости от процессов на катоде и в газе возникают квазистационарные тлеющие разряды различных видов, которые приводят к образованию катодного пятна и искрового канала. Длительность конечной стадии пробоя зависит от длительности начальной стадии, что достигается регулированием процесса приближения положительного пространственного заряда

ионов в электронной лавине к поверхности катода путем изменения недонапряжения пробиваемого газового промежутка. При этом чем больше длительность по времени начальной стадии, тем меньше длительность конечной стадии.

Эти эффекты могут быть применены при конструировании газоразрядных приборов, рэле времени, генераторов импульсных напряжений и токов с регулируемой мощностью и т.д.

ЛИТЕРАТУРЫ

1. Омаров О.А., Рухадзе А.А.//ЖТФ 1980, т. 50, с. 536-539.
2. Гохберг Б.М., Стекольников И.С., Эфендиев А.З. // ДАН СССР, 1952, Том. 87, № 1, физика, с. 29-32.
3. Перминов А.В., Тренкин А.А.// ЖТФ, 2005, т. 75, с. 52-55.
4. Мейланов Р.П., Садыков С.А., Эфендиев А.З. // ЖТФ, 1984, вып.4, с. 790-795.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Х.С. Абдулаева, М.А. Гаджиев, М.Г. Мухидинов. АКТУАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ СПЕЦИАЛИСТА	3
2. М.В. Абилов. РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА ЛАГЕРРА-ЭРМИТА	8
3. Ф.В. Абилова. СХОДИМОСТЬ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ, ПОСТРОЕННЫХ ПО БАЗИСУ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ЛАГЕРРА И ЭРМИТА	11
4. Ф.В. Абилова. НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ СМЕШАННЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ-БЕССЕЛЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ	17
5. Э.К. Агаханов. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛАЖНОСТНОГО НАБУХАНИЯ ГЛИНИСТОГО ГРУНТА	23
6. З.И. Адеев. ЗАДАЧА НА РАЗМЕЩЕНИЕ С ОГРАНИЧЕННЫМИ МОЩНОСТЯМИ	26
7. Агаверди С. Айдаев, Амир С. Айдаев. ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К ОБОСНОВАНИЮ МЕТОДИКИ ОБОБЩЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ДЕФОРМИРУЕМОСТИ ГРУНТОВ РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ.....	31
8. Х.Р. Алиева. ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ НАПРАВЛЕННОСТЬ ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В СИСТЕМЕ СПО ПО ТЕХНИЧЕСКОМУ ПРОФИЛЮ.....	38
9. М.О. Аллаев. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КОМПРЕССИОННЫХ И ШТАМПОВЫХ ИСПЫТАНИЙ ГРУНТОВ С ЦЕЛЬЮ ИХ КОМПЛЕКСИРОВАНИЯ	41
10. Д.Э. Арсланов. ПЕРСПЕКТИВЫ ПРИМЕНЕНИЯ РАСПЛАВОВ ПОЛУПРОВОДНИКОВ СИСТЕМЫ $GeSe-A_2^V B_3^{VI}$ В КАЧЕСТВЕ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ТЕРМИСТОРОВ	46
11. Т.Г. Асадулаева. О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ В ОБЕСПЕЧЕНИИ КАЧЕСТВА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЯХ	49
12. И.К. Асмыкович, О.Н. Пыжкова. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ	51

13. Г.Я. Ахмедов, А.С. Курбанисмаилова. К ВОПРОСУ О ЗАЩИТЕ ГЕОТЕРМАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОТ СОЛЕОТЛОЖЕНИЯ ПРИ УТИЛИЗАЦИИ МЕТАНА.....	56
14. Г.Я. Ахмедов, Л.М. Ахмедова. СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДИКИ КОМПЛЕКСНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭНЕРГИИ ИСТОЧНИКОВ НИЗКОПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ГЕОТЕРМАЛЬНЫХ ВОД.....	59
15. М.Г. Ахмедов. РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ	63
16. М.М. Гаджиев. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ.....	67
17. А.М. Гачаев, С.Д. Умалатов. О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ОПЕРАТОРОВ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ДЛЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ	70
18. А.Г. Гейн, И.В. Куликова. ПРИМЕНЕНИЕ СТУДЕНТАМИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СРЕДСТВ ПРИ РЕШЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ВУЗЕ	76
19. Д.В. Грицук. ПРОИЗВОДНАЯ π-ДЛИНА π-РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ, У КОТОРОЙ ПОРЯДКИ КОФАКТОРОВ ПОДГРУПП СВОБОДНЫ ОТ КВАДРАТОВ.....	80
20. А.А.-П. Джанмурзаев. ВИЗУАЛЬНОЕ ВОСПРИЯТИЕ ОБЪЕКТОВ В СВЁРТОЧНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЯХ	82
21. М.В.Донцова. РАЗРЕШИМОСТЬ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С НУЛЕВЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ	85
22. О.В. Евдулов, М.А. Хазамова, И.Ю. Гамзалова. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ЛОКАЛЬНОЙ ГИПЕРТЕРМИИ ОБЛАСТИ КОЛЕННОГО СУСТАВА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ОХЛАДИТЕЛЕЙ.....	87
23. С.А. Ильясова. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ОЦЕНКИ РИСКОВ.....	91
24. Р.К. Келбиханов, Р.К. Джалалов, М.Г. Мухидинов. УСТАНОВЛЕНИЕМЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ ФИЗИКИ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК С ЦЕЛЬЮ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТА	94

25. А.Е. Кондратенко, В.Н. Соболев. МОМЕНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, МОМЕНТЫ СЕНАТОВА	97
26. А.П. Кондратюк. НАДЕЖНОСТЬ И КАЧЕСТВО ТЕСТИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА.....	100
27. В.И. Корзюк, Я.В. Рудько. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ	102
28. В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ БАЛКИ С ПОДВИЖНОЙ ПОДПРУЖИНЕННОЙ ОПОРОЙ	106
29. О.В. Матысик. МЕТОД ИТЕРАЦИЙ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ	109
30. О.М. Минаев, А.В. Разваров. ИНТЕГРАЦИЯ СНАТGPT С ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМОЙ УЧЕТА ПРОДАЖ НА ОСНОВЕ МИКРОСЕРВИСА FASTAPI.....	113
31. О.М. Минаев, А.В. Разваров. СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ УЧЕТА ПРОДАЖ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОКАЗАТЕЛЕЙ KPI.....	117
32. О.М. Минаев, С.Д. Умалатов. МИНИМИЗАЦИЯ КОЛИЧЕСТВА ВХОДНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ АДАПТИВНОЙ СИСТЕМЫ НЕЙРО-НЕЧЕТКОГО ВЫВОДА ANFIS	122
33. В.Р. Мисюк. ОДНО НЕРАВЕНСТВО БЕРНШТЕЙНА ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ	128
34. Р.Г. Митаров, С.Н. Каллаев. ТЕПЛОЕМКОСТЬ КОМПОЗИТА $xCoFe_2O_4-(1-x)PbTiO_3$	132
35. А.М. Нурмагомедов. ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РИМАНА - ГИЛЬБЕРТА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ.....	135
36. А.М. Нурмагомедов, Р.М. Нурмагомедова. О ЕДИНОМ ПОДХОДЕ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СИНУСОВ	138
37. Ж.А. Отарова, Д.С. Шамуратов. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ...	143

38. П.Г. Поцейко. ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕНИЙ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА НА ОТРЕЗКЕ, ОСНОВАННОМ НА СУММАХ ФУРЬЕ – ЧЕБЫШЕВА.....	149
39. Н.Р. Раджабов, К.С. Болтаев. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МНОГООБРАЗИЯ РЕШЕНИЙ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНОЙ ЛИНИЕЙ В ПЕРВОМ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ ($\mu = -(4m - 3)$)	154
40. А.Р. Рустанов, А.З. Салахов. РЕКУРРЕНТНЫЕ ПРИБЛИЖЕННО КЕЛЕРОВЫ МНОГООБРАЗИЯ.....	158
41. Р.Р. Сафиуллова. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ	166
42. Э.В. Селимханов. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОРЕНМР И ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ИЗ СТАНДАРТНОЙ БИБЛИОТЕКИ C++.....	168
43. Н.В. Серeda. ПРОБЛЕМЫ ВЫБОРА ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ С УЧЕТОМ ТРЕБОВАНИЙ ТОЧНОСТИ РАСЧЕТОВ	172
44. А.И. Серый. ОБ ЭТАПАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАХОЖДЕНИИ УГЛА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ НА СФЕРЕ	175
45. М.М. Сиражудинов, М.Г. Ибрагимов. ПОГРЕШНОСТИ УСРЕДНЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ	178
46. А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко. АППРОКСИМАЦИЯ РЯДОВ ЛОРАНА РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ	181
47. Рагим А. Хаиров, Рахман А. Хаиров. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ФОРМУЛЫ КРИСТОФФЕЛЯ-ДАРБУ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ.....	188
48. М.М. Хамидов, Н.Н. Магомедов. ЭЛЕКТРОННЫЕ ЦЕНТРЫ ПРИЛИПАНИЯ С ОТТАЛКИВАЮЩИМ БАРЬЕРОМ В КРИСТАЛЛАХ CdS:Rbи CdS_xSe_{1-x}<Rb>	190
49. Э.Ш. Шамов. РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ.....	192
50. Э.Ш. Шамов. МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ УСТОЙЧИВЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДВУХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ.....	196

51. Б.М. Шоймкулов. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МНОГООБРАЗИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ СЛАБЫМИ СИНГУЛЯРНЫМИ ТОЧКАМИ И ОДНОЙ ВНУТРЕННЕЙ СИНГУЛЯРНОЙ, СВЕРХСИНГУЛЯРНОЙ ЛИНИЕЙ	199
52. Э.Т. Эмирбеков. ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ФИЛИАЛЕ ДАГЕСТАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА В Г. ДЕРБЕНТЕ	210
53. К.А. Эфендиев. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ ГАЗОВ	218

«МУХТАРОВСКИЕ ЧТЕНИЯ:
АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ,
МЕТОДИКИ ЕЕ ПРЕПОДАВАНИЯ И СМЕЖНЫЕ
ВОПРОСЫ»

МАТЕРИАЛЫ
МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

Формат 60×84 1/16. Бумага офсет 1. Печать ризографная. Гарнитура Таймс.
Усл.п.л. 14,2. Заказ №060-24. Тир. 300 экз. Отпеч. в тип. ИП Тагиева Р.Х.
г. Махачкала, ул. Батырая, 149. Тел.: 8 928 048 10 45

“Ф О Р М А Т”